



Chapitre : Prérequis et évaluation diagnostique

المكتسبات القبلية والتقويم التشخيصي



Test diagnostique



Ton bilan par notion



MonSuperProf IA

🎯 MODE D'EMPLOI

Fais d'abord le **test diagnostique** (QR ci-dessus) : ton bilan te dit quelles fiches relire. Chaque fiche donne l'essentiel de la notion, un exemple résolu, le piège à éviter et un exercice. Cherche l'exercice seul : les **corrigés sont à la fin** du document.

📄 Fiche 1 • Second degré

الحدودية من الدرجة الثانية

★ L'ESSENTIEL

- Pour $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta > 0$: deux racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$: une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$, et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$: pas de racine réelle, pas de factorisation.
- **Signe** : le trinôme a le **signe de a** partout, sauf **entre les racines** (quand $\Delta > 0$), où il a le signe contraire.

🔧 EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre $2x^2 - x - 3 < 0$.

Solution. $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $\frac{1-5}{4} = -1$ et $\frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$. Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est négatif entre les racines : $S =]-1; \frac{3}{2}[$.

⚠️ PIÈGE À ÉVITER

× $-x^2 + 5x - 6 > 0$ à l'extérieur des racines 2 et 3.

✓ Ici $a = -1 < 0$: le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles, donc $S =]2; 3[$.

✂️ À TOI DE JOUER • exercice 1

Résoudre $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

Utile en 2BAC pour : Ch. 1 Limites et continuité · Ch. 2 Dérivation et étude de fonctions · Ch. 4 Fonctions logarithmes · Ch. 5 Fonctions exponentielles · Ch. 6 Nombres complexes

Fiche 2 · Valeur absolue, inéquations, tableau de signes

القيمة المطلقة والمتراجحات وجدول الإشارات

★ L'ESSENTIEL

- $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$; $|x - a|$ est la distance entre x et a .
- Pour $r > 0$: $|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r$; $|x - a| \geq r \iff x \leq a - r$ ou $x \geq a + r$.
- $|ab| = |a| |b|$ et $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire).
- Inéquation produit ou quotient : tout ramener à 0, factoriser, dresser un tableau de signes, exclure les valeurs interdites.

✏ EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre $\frac{2x+1}{x-3} \geq 1$.

Solution. $\frac{2x+1}{x-3} - 1 = \frac{x+4}{x-3} \geq 0$. Tableau de signes : $x+4$ s'annule en -4 , $x-3$ en 3 (valeur interdite). $S =]-\infty; -4] \cup]3; +\infty[$.

⚠ PIÈGE À ÉVITER

$$\times \frac{2x+1}{x-3} \geq 1 \iff 2x+1 \geq x-3.$$

✓ On ne multiplie pas par $x-3$: son signe change selon x . On ramène à 0 et on fait un tableau de signes.

✂ À TOI DE JOUER · exercice 2

Résoudre $|2x-1| < 3$.

Utile en 2BAC pour : Ch. 1 Limites et continuité · Ch. 2 Dérivation et étude de fonctions · Ch. 4 Fonctions logarithmes · Ch. 5 Fonctions exponentielles

Fiche 3 · Généralités sur les fonctions

عموميات حول الدوال

★ L'ESSENTIEL

- Ensemble de définition : dénominateur $\neq 0$; sous une racine carrée, quantité ≥ 0 .
- f paire : D_f symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = f(x)$; la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f impaire : D_f symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = -f(x)$; la courbe est symétrique par rapport à l'origine.
- La droite $x = a$ est axe de symétrie si, pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie si, pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

✏ EXEMPLE RÉSOLU

Étudier la parité de $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Solution. $D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x)$: f est impaire.

⚠ PIÈGE À ÉVITER

$$\times g(x) = x^2 \text{ sur } [-1; 2] \text{ est paire car } (-x)^2 = x^2.$$

✓ $[-1; 2]$ n'est pas symétrique (2 y est, -2 non) : on vérifie toujours D_f d'abord.

✚ À TOI DE JOUER · exercice 3

Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Utile en 2BAC pour : Ch. 2 Dérivation et étude de fonctions

Fiche 4 · Composée, majorant, minorant

مركب دالتين، دالة مكبورة ومصغورة

★ L'ESSENTIEL

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; $x \in D_{g \circ f} \iff x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g$. En général $g \circ f \neq f \circ g$.
- f monotone sur I , g monotone sur $f(I)$: même sens $\Rightarrow g \circ f$ croissante ; sens contraires $\Rightarrow g \circ f$ décroissante.
- f majorée sur I par M : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$; minorée par m : $f(x) \geq m$; bornée : majorée et minorée.
- Comparer f et g : étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

✚ EXEMPLE RÉSOLU

Soit $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Donner D_h et les variations de h .

Solution. $h = g \circ f$ avec $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. D_h : $4 - x^2 \geq 0$, soit $[-2; 2]$. Sur $[-2; 0]$, f est croissante et g aussi : h est croissante. Sur $[0; 2]$, f est décroissante : h est décroissante.

⚠ PIÈGE À ÉVITER

× Avec $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$: $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.

✓ $(g \circ f)(x) = g(x + 1) = (x + 1)^2$; c'est $(f \circ g)(x)$ qui vaut $x^2 + 1$.

✚ À TOI DE JOUER · exercice 4

Montrer que $u(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Utile en 2BAC pour : Ch. 1 Limites et continuité · Ch. 2 Dérivation et étude de fonctions

Fiche 5 · Limites du IBAC

النهايات

★ L'ESSENTIEL

- Limites usuelles : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- En $\pm\infty$: un polynôme a la limite de son terme de plus haut degré ; une fonction rationnelle, celle du quotient des termes de plus haut degré.
- Formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. On factorise, on simplifie, ou on multiplie par la quantité conjuguée.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- Limites et ordre : si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ au voisinage de a et si u et v ont la même limite ℓ en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

Solution. Forme $+\infty - \infty$. Avec la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$

(pour $x > 0$). La limite vaut $\frac{1}{2}$.

⚠ PIÈGE À ÉVITER

× $+\infty - \infty = 0$, donc la limite est 0.

✓ $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée : il faut transformer l'expression (ici, quantité conjuguée).

✂ À TOI DE JOUER · exercice 5

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Utile en 2BAC pour : Ch. 1 Limites et continuité

Fiche 6 · Dérivées usuelles et opérations

مشتقات الدوال الاعتيادية والعمليات

★ L'ESSENTIEL

- $(x^n)' = nx^{n-1}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$) ; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(u + v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ($u > 0$) ; $(f(ax + b))' = a f'(ax + b)$.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$.

Solution. $u = 3x - 1$, $v = x + 2$: $f'(x) = \frac{3(x + 2) - (3x - 1) \times 1}{(x + 2)^2} = \frac{7}{(x + 2)^2}$.

⚠ PIÈGE À ÉVITER

× $(uv)' = u'v'$ » et « $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ ».

✓ $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$: on n'oublie jamais u' .

✂ À TOI DE JOUER · exercice 6

Dériver $f(x) = (2x + 1)^3$ et $g(x) = \cos(3x)$.

Utile en 2BAC pour : Ch. 2 Dérivation et étude de fonctions · Ch. 7 Primitives et calcul intégral

Fiche 7 · Dérivée et variations

المشتقة وتغيرات دالة

★ L'ESSENTIEL

- f dérivable en a : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$; c'est le coefficient directeur de la tangente.
- Tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Sur un intervalle : $f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante ; $f' \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante (f' ne s'annulant qu'en des points isolés).
- Si f' s'annule en a en changeant de signe, f admet un extremum en a : maximum si f' passe de $+$ à $-$, minimum sinon.
- Si les limites à gauche et à droite du taux de variation en a sont différentes, la courbe a deux demi-tangentes en a .

✏ EXEMPLE RÉSOLU

Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x$.

Solution. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. f est croissante sur $]-\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$. Maximum local $f(-1) = 2$, minimum local $f(1) = -2$.

⚠ PIÈGE À ÉVITER

- × Tangente en a : $y = f'(a)x + f(a)$.
- ✓ $y = f'(a)(x - a) + f(a)$: la tangente passe par le point $(a; f(a))$.

✪ À TOI DE JOUER · exercice 7

Donner une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 2.

Utile en 2BAC pour : Ch. 2 Dérivation et étude de fonctions

Fiche 8 · Suites arithmétiques et géométriques

المتتاليات الحسابية والهندسية

★ L'ESSENTIEL

- Arithmétique de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$; $u_n = u_p + (n - p)r$.
- Géométrique de raison q : $u_{n+1} = q u_n$; $u_n = u_p q^{n-p}$.
- Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique : $(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.
- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ($q \neq 1$) : $\text{premier} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.
- De u_p à u_n il y a $n - p + 1$ termes. Monotonie : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

✏ EXEMPLE RÉSOLU

Calculer $S = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10}$.

Solution. Suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 ; de 2^0 à 2^{10} il y a 11 termes.

$$S = 1 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 1 = 2047.$$

⚠ PIÈGE À ÉVITER

- × De u_0 à u_{10} , il y a 10 termes.
- ✓ Il y en a $10 - 0 + 1 = 11$.



✚ À TOI DE JOUER · exercice 8

$u_n = 3n - 2$. Montrer que (u_n) est arithmétique, puis calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

Utile en 2BAC pour : Ch. 3 Suites numériques

Fiche 9 · Raisonnement par récurrence

الاستدلال بالترجع

★ L'ESSENTIEL

- Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:
- 1. **Initialisation** : vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
- 2. **Hérédité** : soit $n \geq n_0$ **fixé** ; on suppose $P(n)$ vraie (hypothèse de récurrence) et on démontre $P(n+1)$.
- 3. **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

✚ EXEMPLE RÉSOLU

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$.

Solution. Initialisation : pour $n = 0$, $1 = 1^2$. Hérédité : si $1 + 3 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$, alors $1 + 3 + \dots + (2n+1) + (2n+3) = (n+1)^2 + 2n+3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. Conclusion : la propriété est vraie pour tout n .

⚠ PIÈGE À ÉVITER

- × L'hérédité est démontrée, donc $P(n)$ est vraie pour tout n .
- ✓ Sans initialisation, on ne peut rien conclure : une propriété toujours fausse peut avoir une hérédité juste.

✚ À TOI DE JOUER · exercice 9

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

Utile en 2BAC pour : Ch. 3 Suites numériques

Fiche 10 · Trigonométrie

حساب المثلثات

★ L'ESSENTIEL

- $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; pour $\sin$, les mêmes valeurs dans l'ordre inverse.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
 $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$.
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$; $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.
- $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.
- $\cos x = \cos \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ OU $x = -\alpha + 2k\pi$; $\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ OU $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

✚ EXEMPLE RÉSOLU

Écrire $\cos x + \sqrt{3} \sin x$ sous la forme $r \cos(x - \varphi)$.

Solution. $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{3}$: $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

⚠ PIÈGE À ÉVITER

× $\cos(a + b) = \cos a + \cos b$.

✓ Contre-exemple : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1$, alors que $\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

🧩 À TOI DE JOUER · exercice 10

Résoudre $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0 ; 2\pi[$.

Utile en 2BAC pour : Ch. 6 Nombres complexes

🤖 MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.



✓ Corrigés des exercices « À toi de jouer »

تصحيح التمارين

Exercice 1 · Second degré. Résoudre $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

$-x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$. Un carré est positif, donc $-(x - 2)^2 \leq 0$ pour tout x ; l'inégalité ≥ 0 n'est vraie que si $x = 2$: $S = \{2\}$.

Exercice 2 · Valeur absolue, inéquations, tableau de signes. Résoudre $|2x - 1| < 3$.

$|2x - 1| < 3 \iff -3 < 2x - 1 < 3 \iff -2 < 2x < 4 \iff -1 < x < 2$: $S =]-1; 2[$.

Exercice 3 · Généralités sur les fonctions. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

$D_f = \mathbb{R}$, donc $2 - x \in D_f$. $f(2 - x) = (2 - x)^2 - 2(2 - x) + 3 = x^2 - 2x + 3 = f(x)$: la droite $x = 1$ est axe de symétrie.

Exercice 4 · Composée, majorant, minorant. Montrer que $u(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

$x^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc $0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$: u est minorée par 0 et majorée par 1, donc bornée.

Exercice 5 · Limites du 1BAC. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Forme $\frac{0}{0}$. Pour $x \neq 2$: $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$. La limite vaut 4.

Exercice 6 · Dérivées usuelles et opérations. Dériver $f(x) = (2x + 1)^3$ et $g(x) = \cos(3x)$.

$f'(x) = 3 \times 2 \times (2x + 1)^2 = 6(2x + 1)^2$; $g'(x) = 3 \times (-\sin(3x)) = -3\sin(3x)$.

Exercice 7 · Dérivée et variations. Donner une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 2.

$f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'(2) = -\frac{1}{4}$. $y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1$.

Exercice 8 · Suites arithmétiques et géométriques. $u_n = 3n - 2$. Montrer que (u_n) est arithmétique, puis calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

$u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) - 2 - (3n - 2) = 3$: arithmétique de raison 3. $u_1 = 1$, $u_{10} = 28$, 10 termes :

$S = 10 \times \frac{1 + 28}{2} = 145$.

Exercice 9 · Raisonnement par récurrence. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

Initialisation : $0 < 1 < 2$. Hérédité : si $0 < u_n < 2$, alors $2 < u_n + 2 < 4$, donc $\sqrt{2} < u_{n+1} < 2$, et ainsi $0 < u_{n+1} < 2$. Conclusion : $0 < u_n < 2$ pour tout n .

Exercice 10 · Trigonométrie. Résoudre $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi[$.

$\sin x = \sin \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Dans $[0; 2\pi[$: $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$.