



Chapitre : Limites et continuité

النهايات والاتصال



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

💡 SITUATION DÉCLENCHANTE وضعية انطلاق

La température d'une salle varie **sans saut** : pour passer de 18 °C à 22 °C, elle passe par toutes les valeurs intermédiaires, par exemple 20 °C. Sa courbe se trace « sans lever le crayon » : c'est une fonction **continue**.

Le prix d'un parking, lui, **saute** : 5 DH pendant la première heure, puis 10 DH dès que l'on dépasse une heure. Juste avant une heure, le prix vaut 5 DH ; juste après, 10 DH : la courbe présente un saut, la fonction n'est pas continue en 1.

Dans ce chapitre, on traduit cette idée avec les **limites**, puis on en tire des théorèmes très utiles pour résoudre des équations.

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE أهداف الفصل

- Calculer des limites et lever les formes indéterminées.
- Étudier la continuité d'une fonction en un point, à droite, à gauche et sur un intervalle.
- Déterminer l'image d'un intervalle et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour résoudre des équations.
- Montrer qu'une fonction admet une fonction réciproque ; calculer avec les racines n-ièmes et les puissances rationnelles.

★ 1. Limites : rappels et formes indéterminées

النهايات: تذكير والأشكال غير المحددة

★ À RETENIR

Polynômes et fonctions rationnelles : en un réel a de l'ensemble de définition, on remplace :

$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$. En $+\infty$ ou $-\infty$, la limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré ; celle d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré.

Opérations : les règles sur la somme, le produit et le quotient donnent la limite, sauf dans les quatre

formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Pour lever une forme indéterminée : factoriser puis simplifier, ou multiplier par l'expression conjuguée quand il y a une racine carrée.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

Solution. 1) Forme $\frac{0}{0}$. Pour $x \neq 2$: $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$, donc la limite vaut 4.

2) Forme $\infty - \infty$. On multiplie par la conjuguée : $\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$ pour $x > 0$. Donc la limite vaut $\frac{1}{2}$.

2. Limites trigonométriques

النهايات المثلثية

PROPRIÉTÉS

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Plus généralement, pour $a \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$.

Ces limites ne valent qu'en 0.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Solution. On fait apparaître $\frac{\sin 3x}{3x}$: $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \times \frac{\sin 3x}{3x}$. Quand $x \rightarrow 0$, $3x \rightarrow 0$ et $\frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 1$. Donc la limite vaut 3.

3. Limites et ordre

النهايات والترتيب

THÉORÈME

Les résultats suivants valent en $+\infty$, en $-\infty$, en un réel a , à droite ou à gauche.

- Si $f(x) \geq u(x)$ et $\lim u(x) = +\infty$, alors $\lim f(x) = +\infty$. Si $f(x) \leq v(x)$ et $\lim v(x) = -\infty$, alors $\lim f(x) = -\infty$.
- **Encadrement** : si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si u et v ont la même limite ℓ , alors $\lim f(x) = \ell$.
- Si $|f(x) - \ell| \leq v(x)$ et $\lim v(x) = 0$, alors $\lim f(x) = \ell$.

On s'en sert surtout avec $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$.

Solution. 1) Pour $x > 0$: $\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc la limite vaut 0 (et non 1 : la limite « $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ » ne vaut qu'en 0).

2) $\cos x \geq -1$, donc $x + \cos x \geq x - 1$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x) = +\infty$.

4. Continuité en un point

الاتصال في نقطة

DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On dit que f est **continue en a** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Il faut donc trois choses : $f(a)$ existe, la limite de f en a existe et elle est finie, et cette limite est égale à $f(a)$. Sinon, f est **discontinue** en a .

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 5}{x - 1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = 8$. Étudier la continuité de f en 1.

Solution. $3x^2 + 2x - 5 = (x - 1)(3x + 5)$, donc pour $x \neq 1$: $f(x) = 3x + 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 5) = 8 = f(1) : f \text{ est continue en } 1.$$

5. Continuité à droite, à gauche

الاتصال على اليمين وعلى اليسار

PROPRIÉTÉS

f est **continue à droite** en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, et **continue à gauche** en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Propriété : f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite **et** à gauche en a .

On utilise ces limites pour une fonction définie par morceaux : on calcule séparément la limite à gauche et la limite à droite, puis on les compare à $f(a)$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Soit $f(x) = 2x + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = x + 3$ si $x > 1$. Étudier la continuité de f en 1. **2)** Soit $g(x) = x^2 + m$ si $x \leq 1$ et $g(x) = 2x + 1$ si $x > 1$. Déterminer le réel m pour que g soit continue en 1.

Solution. 1) $f(1) = 3$. À gauche : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3 = f(1)$, f est continue à gauche. À droite : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 3) = 4 \neq f(1)$, f n'est pas continue à droite. Donc f n'est pas continue en 1 (la courbe fait un saut).

2) $g(1) = 1 + m$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1 + m$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 3$. g est continue en 1 si et seulement si $1 + m = 3$, c'est-à-dire $m = 2$.

6. Prolongement par continuité

التمديد بالاتصال

DÉFINITIONS

Soit f une fonction **non définie** en a , mais définie autour de a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ avec ℓ **réel**, la fonction g définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \neq a$ et $g(a) = \ell$ est continue en a . On l'appelle le **prolongement par continuité** de f en a .

Si la limite est infinie ou n'existe pas, il n'y a pas de prolongement par continuité.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et le définir.

Solution. f n'est pas définie en 0, et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (limite réelle).

Le prolongement par continuité de f en 0 est la fonction g définie par $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

7. Continuité sur un intervalle et opérations

الاتصال على مجال والعمليات

PROPRIÉTÉS

f est continue sur un intervalle ouvert $]a; b[$ si elle est continue en tout point de cet intervalle ; sur $[a; b]$, il faut en plus la continuité à droite en a et à gauche en b .

Fonctions usuelles (admis) : les polynômes, $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$; une fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition ; $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$; $\tan$ est continue sur chaque intervalle où elle est définie.

Opérations : si f et g sont continues sur I , alors $f + g$, kf , fg , f^n et $|f|$ sont continues sur I ; $\frac{f}{g}$ aussi si g ne s'annule pas sur I ; $\sqrt{f}$ aussi si $f \geq 0$ sur I .

EXEMPLE RÉSOLU

Justifier que **1)** $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$ est continue sur $]3; +\infty[$; **2)** $g(x) = \sqrt{x - 1} + x^2$ est continue sur $[1; +\infty[$.

Solution. **1)** f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; $]3; +\infty[$ est un intervalle inclus dans cet ensemble, donc f y est continue.

2) $x \mapsto x - 1$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$, donc $x \mapsto \sqrt{x - 1}$ y est continue ; $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. La somme g est continue sur $[1; +\infty[$.

8. Continuité et limite d'une composée

اتصال ونهاية مركب دالتين

THÉORÈME

- Si f est continue sur I , g continue sur J et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I .
- Limite :** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ (en a , en $+\infty$ ou en $-\infty$) et si g est continue en ℓ , alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\ell)$.

En pratique : on calcule d'abord la limite de l'expression « intérieure », puis on applique la fonction continue « extérieure ».

EXEMPLE RÉSOLU

1) Justifier que $x \mapsto \cos(2x^2 - 3x + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$. **2)** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x + 1}{x + 2}}$.

Solution. **1)** $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$, et $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$: la composée est continue sur $\mathbb{R}$.

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x} = 4$, et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 4. Donc la limite vaut $\sqrt{4} = 2$.

9. Image d'un intervalle par une fonction continue

صورة مجال بدالة متصلة

PROPRIÉTÉS

Admis :

- l'image d'un **segment** $[a; b]$ par une fonction continue est un segment $[m; M]$, où m est le minimum et M le maximum de f sur $[a; b]$;
- l'image d'un **intervalle** par une fonction continue est un intervalle.

Si la fonction n'est pas monotone, on lit m et M sur le **tableau de variations** : l'image n'est pas forcément l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer $f([-1; 2])$.

Solution. f est continue, décroissante sur $[-1; 0]$ et croissante sur $[0; 2]$. Son minimum sur $[-1; 2]$ est $f(0) = 0$; son maximum est $\max(f(-1); f(2)) = \max(1; 4) = 4$.

Donc $f([-1; 2]) = [0; 4]$, et non $[1; 4]$.

★ 10. Image par une fonction continue et strictement monotone صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعاً

★ À RETENIR

Si f est continue et **strictement monotone** sur I , $f(I)$ est un intervalle de même nature, dont les bornes sont les images ou les limites aux bornes de I :

Intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a; +\infty[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$

Si f est décroissante, les bornes sont **inversées**. En une borne ouverte, on utilise la limite. Les cas $] - \infty; b]$ et $\mathbb{R}$ se traitent de la même façon.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer **1)** $f([1; +\infty[)$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$; **2)** $g([-3; -1])$ pour $g(x) = x^2$.

Solution. **1)** f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, avec $f(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc

$f([1; +\infty[) =]0; 1]$.

2) g est continue et strictement décroissante sur $[-3; -1]$. Donc $g([-3; -1]) = [g(-1); g(-3)] = [1; 9]$.

🏛 11. Théorème des valeurs intermédiaires

مبرهنة القيم الوسيطة

🏛 THÉORÈME

Si f est **continue** sur $[a; b]$, alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet **au moins une** solution dans $[a; b]$.

Cas fréquent : si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a; b[$.

La continuité est indispensable : $x \mapsto \frac{1}{x}$ change de signe entre -1 et 1 sans jamais s'annuler.

EXEMPLE RÉSOLU

Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 1[$.

Solution. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ est un polynôme, donc continue sur $[0; 1]$.

$f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$, donc $f(0) \times f(1) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 1[$.

12. Méthode : prouver qu'une solution est unique

طريقة : إثبات وحدانية الحل

MÉTHODE

Si f est **continue et strictement monotone** sur un intervalle I et si $\lambda \in f(I)$, alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une **unique** solution dans I .

Rédaction type examen pour « $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]a; b[$ » :

1. f est continue sur $[a; b]$;
2. f est strictement monotone sur $[a; b]$;
3. $f(a) \times f(b) < 0$;
4. conclure : solution unique α dans $]a; b[$.

On en déduit souvent le **signe** de f de part et d'autre de α .

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. **1)** Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$. **2)** En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. **1)** f est continue sur $\mathbb{R}$; elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme somme des fonctions strictement croissantes $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x - 1$. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.

2) f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$: $f(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

13. Méthode de dichotomie

طريقة التفرع الثنائي

MÉTHODE

Pour encadrer la solution α de $f(x) = 0$ sur $[a; b]$ (avec $f(a) \times f(b) < 0$) :

1. calculer $f(c)$ au milieu $c = \frac{a+b}{2}$;
2. si $f(a) \times f(c) < 0$, alors $\alpha \in]a; c[$; sinon $\alpha \in]c; b[$ (ou $\alpha = c$ si $f(c) = 0$) ;
3. recommencer avec le nouvel intervalle : à chaque étape, l'amplitude est divisée par 2.

EXEMPLE RÉSOLU

Avec $f(x) = x^3 + x - 1$ et $\alpha \in]0; 1[$ (§ 12), donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

Solution. $f(0,5) = 0,125 + 0,5 - 1 = -0,375 < 0$ et $f(1) > 0$: $\alpha \in]0,5; 1[$.

$f(0,75) = 0,421875 + 0,75 - 1 = 0,171875 > 0$: $\alpha \in]0,5; 0,75[$.

Encadrement d'amplitude 0,25 : $0,5 < \alpha < 0,75$.

14. Fonction réciproque

الدالة العكسية

THÉORÈME

Si f est **continue et strictement monotone** sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$: pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans I . La fonction qui à y associe cette solution est la **fonction réciproque** f^{-1} , définie sur J .

- Pour $x \in J$ et $y \in I$: $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$;
- $f(f^{-1}(x)) = x$ pour $x \in J$, et $f^{-1}(f(x)) = x$ pour $x \in I$;
- f^{-1} est continue sur J et a le **même sens de variation** que f ;
- dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Attention : $f^{-1}(x)$ n'est pas $\frac{1}{f(x)}$.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = x^2 + 1$ sur $I = [0; +\infty[$. **1)** Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer. **2)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Solution. **1)** f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Elle admet une réciproque définie sur $J = f(I) = [1; +\infty[$.

2) Soit $x \in [1; +\infty[$ et $y \in [0; +\infty[$: $f(y) = x \iff y^2 = x - 1 \iff y = \sqrt{x - 1}$ (car $y \geq 0$). Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$.

15. Racine n-ième

الجذر من الرتبة n

PROPRIÉTÉS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; sa réciproque est la fonction **racine n-ième** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, définie sur $[0; +\infty[$. Pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$. Cas particuliers : $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x}$ est la racine cubique.

Règles (pour $a \geq 0, b \geq 0, n, p \geq 1$) : $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$; $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($b > 0$) ; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$; $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \iff a < b$.

Limites et continuité : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. Si $u \geq 0$ est continue sur I , $\sqrt[n]{u}$ est continue sur I ; si $\lim u = \ell \geq 0$, alors $\lim \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{\ell}$.

Équation $x^n = a$:

Équation $x^n = a$ ($a \neq 0$)	n pair	n impair
$a > 0$	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

EXEMPLE RÉSOLU

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^3 = 8$; $x^3 = -27$; $x^4 = 16$. **2)** Simplifier $A = \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4}$.

Solution. **1)** $x^3 = 8 \iff x = \sqrt[3]{8} = 2$. $x^3 = -27 \iff x = -\sqrt[3]{27} = -3$ (n impair, $a < 0$). $x^4 = 16 \iff x = 2$ ou $x = -2$ (n pair, $a > 0$).

2) $A = \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{64} = 4$.

16. Puissances rationnelles

القوى الجذرية

PROPRIÉTÉS

Soit $a > 0$ et $r = \frac{p}{q}$ un rationnel ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$). On pose $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$. En particulier $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Règles (pour $a > 0, b > 0, r$ et r' rationnels) : $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$; $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$; $(ab)^r = a^r b^r$; $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$;
 $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Ce sont les mêmes règles que pour les puissances entières, mais la base doit être **strictement positive**.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer $A = 8^{\frac{2}{3}}$ et $B = 4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}}$.

Solution. $A = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.

$B = \sqrt{4} \times \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$.

★ À retenir

ما يجب تذكره

★ À RETENIR

- Continue en a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; pour une fonction par morceaux, comparer les limites à gauche et à droite avec $f(a)$.
- Formes indéterminées : $\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$: factoriser ou utiliser la conjuguée. $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ seulement en 0.
- TVI : il faut la **continuité** ; il donne **au moins une** solution.
- Unicité : continue **et strictement monotone**.
- Image par une fonction décroissante : bornes **inversées** ; borne ouverte : limite.
- Réciproque : définie sur $J = f(I)$; $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.
- $\sqrt[n]{x}$ et a^r : base positive (strictement positive pour a^r) ; la solution de $x^3 = -8$ s'écrit $-\sqrt[3]{8} = -2$.

✗ Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ « $\infty - \infty = 0$. »

✓ C'est une forme indéterminée : factoriser ou utiliser la conjuguée. Exemple : $\sqrt{x^2 + x} - x \rightarrow \frac{1}{2}$ en $+\infty$.

✗ « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$. »

✓ Cette limite vaut 1 seulement en 0. En $+\infty$: $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$, donc la limite vaut 0.

✗ Fonction par morceaux : conclure avec une seule limite.

✓ Calculer la limite à gauche **et** la limite à droite, puis les comparer à $f(a)$.

✗ « $f(a)f(b) < 0$, donc la solution est unique. »

✓ Le TVI donne **au moins une** solution ; l'unicité exige la **stricte monotonie**.



✗ « f décroissante : $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$. »

✓ Les bornes s'inversent : $[f(b); f(a)]$. Et en une borne ouverte, on utilise la limite.

✗ « $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$. »

✓ f^{-1} est la réciproque : $f(f^{-1}(x)) = x$. Exemple : pour $f(x) = 2x + 1$, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

**MONSUPERPROF IA**

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.

