



Chapitre : Limites et continuité

النهايات والاتصال



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

★ Limites : formes indéterminées

★ À RETENIR

- En $\pm\infty$: un polynôme a la limite de son terme de plus haut degré ; une fonction rationnelle, celle du quotient des termes de plus haut degré.
- Formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.
- Pour les lever : factoriser puis simplifier, ou multiplier par l'expression conjuguée.

Limites trigonométriques

PROPRIÉTÉS

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- Pour $a \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$. Ces limites ne valent qu'en 0.

Limites et ordre

THÉORÈME

- $f \geq u$ et $u \rightarrow +\infty \Rightarrow f \rightarrow +\infty$; $f \leq v$ et $v \rightarrow -\infty \Rightarrow f \rightarrow -\infty$.
- Encadrement : $u \leq f \leq v$ et u, v de même limite $\ell \Rightarrow f \rightarrow \ell$; $|f - \ell| \leq v$ et $v \rightarrow 0 \Rightarrow f \rightarrow \ell$.

Continuité en un point

DÉFINITIONS

- f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; à droite si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, à gauche si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.
- Continue en $a \iff$ continue à droite **et** à gauche en a (fonctions définies par morceaux).
- Remarque : si f n'est pas définie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ réel, on la prolonge par continuité avec la valeur ℓ .

Continuité sur un intervalle

PROPRIÉTÉS

- Polynômes, $\sin$, $\cos$: continues sur $\mathbb{R}$; fonctions rationnelles et $\tan$: continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition ; $\sqrt{x}$: continue sur $[0; +\infty[$.
- $f + g$, kf , fg , f^n , $|f|$ continues ; $\frac{f}{g}$ si $g \neq 0$; $\sqrt{f}$ si $f \geq 0$.

Composée

THÉORÈME

- f continue sur I , g continue sur J , $f(I) \subset J \Rightarrow g \circ f$ continue sur I .
- $\lim f(x) = \ell$ et g continue en $\ell \Rightarrow \lim g(f(x)) = g(\ell)$.

Image d'un intervalle

PROPRIÉTÉS

- Fonction continue : l'image d'un segment est un segment $[m; M]$, l'image d'un intervalle est un intervalle (lire m et M sur le tableau de variations).
- Continue et strictement croissante : $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$; strictement décroissante : $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$; en une borne ouverte, on prend la limite.

Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME

- f continue sur $[a; b]$, λ entre $f(a)$ et $f(b)$: $f(x) = \lambda$ a **au moins une** solution dans $[a; b]$.
- f continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$: $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]a; b[$.

Solution unique et dichotomie

MÉTHODE

1. f continue sur $[a; b]$;
2. f strictement monotone sur $[a; b]$;
3. $f(a) \times f(b) < 0$;
4. conclure : solution unique $\alpha \in]a; b[$, puis signe de f de part et d'autre de α .

Dichotomie : calculer $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, garder la moitié où f change de signe ; l'amplitude est divisée par 2 à chaque étape.

Fonction réciproque

THÉORÈME

- f continue et strictement monotone sur I : bijection de I sur $J = f(I)$, réciproque f^{-1} définie sur J .
- $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$ ($x \in J, y \in I$) ; f^{-1} est continue, de même sens de variation que f .
- Courbes de f et f^{-1} symétriques par rapport à $y = x$. Attention : $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.



Racine n-ième

PROPRIÉTÉS

- Pour $x \geq 0, y \geq 0$: $\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$; $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.
- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$; $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \iff a < b$.
- $x^n = a$: n pair, $a > 0$: $\pm \sqrt[n]{a}$; n pair, $a < 0$: pas de solution ; n impair : $\sqrt[n]{a}$ si $a > 0$, $-\sqrt[n]{-a}$ si $a < 0$.

Puissances rationnelles

PROPRIÉTÉS

- $a > 0, r = \frac{p}{q}$: $a^r = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$; $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
- $a^r a^{r'} = a^{r+r'}$; $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$; $(ab)^r = a^r b^r$; $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$; $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$.

✗ Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ « $\infty - \infty = 0$. »

✓ C'est une forme indéterminée : factoriser ou utiliser la conjuguée. Exemple : $\sqrt{x^2 + x} - x \rightarrow \frac{1}{2}$ en $+\infty$.

✗ « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$. »

✓ Cette limite vaut 1 seulement en 0. En $+\infty$: $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$, donc la limite vaut 0.

✗ Fonction par morceaux : conclure avec une seule limite.

✓ Calculer la limite à gauche **et** la limite à droite, puis les comparer à $f(a)$.

✗ « $f(a)f(b) < 0$, donc la solution est unique. »

✓ Le TVI donne **au moins une** solution ; l'unicité exige la **stricte monotonie**.

✗ « f décroissante : $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$. »

✓ Les bornes s'inversent : $[f(b); f(a)]$. Et en une borne ouverte, on utilise la limite.

✗ « $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$. »

✓ f^{-1} est la réciproque : $f(f^{-1}(x)) = x$. Exemple : pour $f(x) = 2x + 1$, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

★ Tableau récapitulatif des formules

Formule	Conditions d'usage
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_p x^p + \dots} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$	Fonction rationnelle en $\pm\infty$
$\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$	Expression conjuguée ($\sqrt{A} + B \neq 0$), pour lever $\infty - \infty$ ou $\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	En 0 seulement
$u \leq f \leq v, \lim u = \lim v = \ell \Rightarrow \lim f = \ell$	Encadrement ; avec $-1 \leq \sin x \leq 1$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$	Continuité en a ; par morceaux : limites à gauche et à droite
$\lim g(f(x)) = g(\ell)$	$\lim f(x) = \ell$ et g continue en ℓ
$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$	f continue et strictement croissante (ou décroissante)
$f(a) \times f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in]a; b[, f(c) = 0$	f continue sur $[a; b]$; unique si strictement monotone
$J = f(I) ; f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$	f continue et strictement monotone sur I
$\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$	$x \geq 0, y \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} ; \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$	$a \geq 0, b \geq 0$
$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} ; a^r a^{r'} = a^{r+r'}$	$a > 0 ; r, r'$ rationnels

MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.