



Chapitre : Dérivation et étude de fonctions

الاشتقاق ودراسة الدوال



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

💡 SITUATION DÉCLENCHANTE وضعية انطلاق

Une bille est lâchée sans vitesse. Une chronophotographie (une image par seconde) donne les distances parcourues : 5 m après 1 s, 20 m après 2 s, 45 m après 3 s. On remarque que $5 = 5 \times 1^2$, $20 = 5 \times 2^2$ et $45 = 5 \times 3^2$: la distance suit la loi $d(t) = 5t^2$ (loi de la chute libre, démontrée en physique en 2e BAC).

En tronc commun, on estime la vitesse à $t = 2$ s avec les positions voisines : $v_2 \approx \frac{M_1 M_3}{2\tau} = \frac{45 - 5}{2} = 20$ m/s.

En mathématiques, entre $t = 2$ et $t = 2 + h$, la vitesse moyenne vaut $\frac{d(2+h) - d(2)}{h} = \frac{20h + 5h^2}{h} = 20 + 5h$. Quand h devient très petit, cette vitesse moyenne se rapproche de 20 : la vitesse **instantanée** à $t = 2$ s est exactement 20 m/s. Ce nombre limite s'appelle le **nombre dérivé** de d en 2. En physique, on écrit $v = \frac{dx}{dt}$; en mathématiques, $dy = f'(x) dx$.

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE أهداف الفصل

- Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point et interpréter le résultat sur la courbe.
- Calculer des dérivées : opérations, composée, réciproque, racine n-ième.
- Utiliser f' pour les variations et les extremums, f'' pour la concavité.
- Étudier les branches infinies et les symétries, puis mener une étude complète de fonction.

1. Dérivabilité en un point

قابلية الاشتقاق في نقطة

📘 DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On dit que f est **dérivable en** x_0 s'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$.

Le réel ℓ est le **nombre dérivé** de f en x_0 ; on le note $f'(x_0)$. Le quotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'appelle le **taux de variation** de f entre x_0 et x .

EXEMPLE RÉSOLU

Étudier la dérivabilité de $f(x) = 2x^2$ en $x_0 = 2$.

Solution. $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \frac{2(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 2(x + 2)$ pour $x \neq 2$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2(x + 2) = 8$: f est dérivable en 2 et $f'(2) = 8$.

2. Dérivabilité à droite, à gauche

قابلية الاشتقاق على اليمين وعلى اليسار

DÉFINITIONS

f est **dérivable à droite** en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1$ (réel) ; on note $f'_d(x_0) = \ell_1$. De même à gauche

: $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Propriété : f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

On utilise ces limites pour une fonction définie par morceaux, avec une valeur absolue, ou en une borne de l'ensemble de définition.

EXEMPLE RÉSOLU

Étudier la dérivabilité de $f(x) = |x - 2|$ en $x_0 = 2$.

Solution. Pour $x > 2$: $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x - 2}{x - 2} = 1$, donc $f'_d(2) = 1$.

Pour $x < 2$: $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1$, donc $f'_g(2) = -1$.

$f'_d(2) \neq f'_g(2)$: f n'est pas dérivable en 2. En $A(2; 0)$, la courbe a deux demi-tangentes de coefficients directeurs 1 et -1 : c'est un **point anguleux**.

3. Interprétation géométrique

التأويل الهندسي

★ À RETENIR

Tangente : si f est dérivable en x_0 , la courbe (C_f) admet au point $A(x_0; f(x_0))$ la tangente d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ce que dit la limite du taux de variation :

- limite réelle ℓ : tangente de coefficient directeur ℓ (horizontale si $\ell = 0$) ;
- limite réelle à droite (ou à gauche) seulement : demi-tangente ;
- limite $\pm\infty$: f n'est pas dérivable, mais la courbe a une tangente (ou une demi-tangente) **verticale** d'équation $x = x_0$.

Approximation affine : pour x proche de x_0 , $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Équation de la tangente à la courbe de $g(x) = x^3$ au point d'abscisse 1. 2) Étudier la dérivabilité à droite de $h(x) = \sqrt{x - 2}$ en 2 et interpréter.

Solution. 1) $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1 \rightarrow 3$, donc $g'(1) = 3$; avec $g(1) = 1$: $y = 3(x - 1) + 1$, soit $y = 3x - 2$.

2) Pour $x > 2$: $\frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x - 2}}{x - 2} = \frac{1}{\sqrt{x - 2}} \rightarrow +\infty$. h n'est pas dérivable à droite en 2 : la courbe admet au point $(2; 0)$ une demi-tangente verticale.

4. Dérivabilité et continuité

الاشتقاق والاتصال

PROPRIÉTÉS

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

La réciproque est **fausse** : $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$, donc elle n'est pas dérivable en 0.

Conséquence pratique : si f n'est pas continue en x_0 , elle n'y est pas dérivable ; on vérifie donc d'abord la continuité.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 2x$ si $x > 1$. Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 1.

Solution. Continuité : $f(1) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$: f est continue en 1.

À gauche : $\frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \rightarrow 2$. **À droite** : $\frac{2x - 2}{x - 1} = 2$. Donc $f'_g(1) = f'_d(1) = 2$: f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

5. Fonction dérivée et dérivées usuelles

الدالة المشتقة ومشتقات الدوال الاعتيادية

PROPRIÉTÉS

f est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout point de I ; sur $[a; b]$, il faut en plus la dérivabilité à droite en a et à gauche en b . La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée**.

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi [$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$; toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

6. Opérations sur les fonctions dérivables

العمليات على الدوال القابلة للاشتقاق

PROPRIÉTÉS

Si u et v sont dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$:

- $(u + v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$;
- si v ne s'annule pas sur I : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;
- si $u > 0$ sur I : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Avant de dériver, on précise toujours l'intervalle où la fonction est définie et dérivable.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. $u = 2x - 1$, $u' = 2$; $v = x^2 + 1 > 0$, $v' = 2x$.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}.$$

7. Dérivée d'une fonction composée

مشتقة مركب دالتين

THÉORÈME

Si f est dérivable sur I et g dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

Cas fréquents : $(\sin u)' = u' \cos u$; $(\cos u)' = -u' \sin u$; $(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$.

Notation différentielle : si $y = f(x)$, on écrit $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, ou $dy = f'(x) dx$.

EXEMPLE RÉSOLU

Dériver **1)** $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$; **2)** $g(x) = \cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. **1)** $u = x^2 + 3 > 0$, $u' = 2x$: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

2) $g = u^3$ avec $u = \cos x$, $u' = -\sin x$: $g'(x) = 3u^2 u' = -3 \sin x \cos^2 x$.

8. Méthode : calculer une limite avec un nombre dérivé

طريقة : حساب نهاية باستعمال العدد المشتق

MÉTHODE

Une limite de la forme $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le nombre dérivé $f'(a)$, si f est dérivable en a .

1. Reconnaître f et a , et vérifier le numérateur : $f(x) - f(a)$.
2. Calculer $f'(x)$ avec les formules.
3. Conclure : la limite vaut $f'(a)$.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$.

Solution. 1) Avec $f(x) = \sin 2x$: $f(0) = 0$, donc $\frac{\sin 2x}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. $f'(x) = 2 \cos 2x$, d'où la limite $f'(0) = 2$.

2) Avec $f(x) = \sqrt{x+2}$: $f(2) = 2$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$, d'où la limite $f'(2) = \frac{1}{4}$.

9. Dérivée et monotonie

الاشتقاق ورتابة دالة

THÉORÈME

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- $f' \geq 0$ sur $I \iff f$ croissante sur I ; $f' \leq 0$ sur $I \iff f$ décroissante sur I ; $f' = 0$ sur $I \iff f$ constante sur I .
- Si $f' > 0$ sur I , sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement croissante sur I (même chose pour décroissante).

On résume l'étude dans un **tableau de variations**. Attention : la conclusion vaut sur un intervalle, jamais sur une réunion d'intervalles.

EXEMPLE RÉSOLU

Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

$f'(x) > 0$ sur $] -\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$; $f'(x) < 0$ sur $] -1 ; 1[$.

f est strictement croissante sur $] -\infty ; -1]$, strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$, strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$.

10. Extremums et problèmes d'optimisation

المطاريق ومسائل الأمثلية

PROPRIÉTÉS

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum (maximum si f' passe de $+$ à $-$, minimum si f' passe de $-$ à $+$). En x_0 , la tangente est horizontale.

Attention : $f'(x_0) = 0$ ne suffit pas. Pour $x \mapsto x^3$, $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe : pas d'extremum en 0.

EXEMPLE RÉSOLU

Parmi les rectangles de périmètre 20 cm, lequel a la plus grande aire ?

Solution. Si un côté mesure x ($0 < x < 10$), l'autre mesure $10 - x$ et l'aire vaut $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$.

$A'(x) = 10 - 2x$ s'annule en $x = 5$ en passant de $+$ à $-$: A est maximale pour $x = 5$.

Le rectangle d'aire maximale est le carré de côté 5 cm, d'aire 25 cm².



11. Signe d'une fonction et résolution graphique

إشارة دالة والحل المباني

MÉTHODE

Signe à partir du tableau de variations : si le minimum de g sur I est strictement positif, alors $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Si g est strictement monotone et s'annule en α , g change de signe en α .

Signe à partir de la courbe : $g(x) > 0$ là où la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses.

Résolution graphique : les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (C_g) ; celles de $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points où (C_f) est au-dessous de (C_g) .

EXEMPLE RÉSOLU

Montrer que $g(x) = x^3 - 3x + 3 > 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Solution. $g'(x) = 3(x-1)(x+1)$: sur $[0; +\infty[$, $g'(x) \leq 0$ sur $[0; 1]$ et $g'(x) \geq 0$ sur $[1; +\infty[$.

g admet donc sur $[0; +\infty[$ un minimum en 1 : $g(1) = 1 > 0$.

Ainsi $g(x) \geq g(1) > 0$ pour tout $x \geq 0$.



12. Dérivée de la fonction réciproque

مشتقة الدالة العكسية

THÉORÈME

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I : elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$ (chapitre 1).

- Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.
- f^{-1} a la même monotonie que f ; sa courbe est la symétrique de (C_f) par rapport à la droite $y = x$.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = x^3 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$. **1)** Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$. **2)** Calculer $f(1)$, puis montrer que f^{-1} est dérivable en 3 et calculer $(f^{-1})'(3)$. **3)** Donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 3.

Solution. **1)** $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; elle admet une réciproque définie sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2) $f(1) = 3$ et $f'(1) = 4 \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en 3 et $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$.

3) $f^{-1}(3) = 1$: $y = \frac{1}{4}(x-3) + 1$, soit $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.



13. Racine n-ième et puissances rationnelles

الجذر من الرتبة n والقوى الجذرية

PROPRIÉTÉS

Pour $n \geq 2$: la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Si u est dérivable et strictement positive sur I : $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ (au programme : le calcul de cette dérivée, pas l'étude de ces fonctions pour $n \geq 3$).

Pour $r \in \mathbb{Q}^*$: $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(x^r)' = r x^{r-1}$.

EXEMPLE RÉSOLU

Dériver $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. $u = x^2 + 1 > 0$ et $u' = 2x$, donc $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$.

Autre écriture : $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$, d'où $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 2x (x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}$: même résultat.

14. Dérivée seconde et concavité

المشتقة الثانية وتقع منحني

PROPRIÉTÉS

Si f' est dérivable sur I , sa dérivée est la **dérivée seconde** f'' .

- Si $f'' \geq 0$ sur I , la courbe (C_f) est **convexe** sur I (concavité tournée vers les y positifs) : elle est au-dessus de ses tangentes.
- Si $f'' \leq 0$ sur I , la courbe est **concave** sur I (concavité tournée vers les y négatifs) : elle est au-dessous de ses tangentes.
- Si f'' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, le point $A(x_0; f(x_0))$ est un **point d'inflexion** : la courbe y traverse sa tangente.

On peut aussi lire la concavité sur la courbe de f' : f' croissante signifie courbe convexe.

EXEMPLE RÉSOLU

Étudier la concavité de la courbe de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Solution. $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.

$f''(x) < 0$ sur $]-\infty; 1[$: courbe concave ; $f''(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$: courbe convexe.

f'' s'annule en 1 en changeant de signe : $A(1; -1)$ est un point d'inflexion.

15. Méthode : démontrer une inégalité

طريقة : البرهان على متفاوتة

MÉTHODE

Pour montrer que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle I :

1. poser $h(x) = g(x) - f(x)$;
2. étudier les variations de h sur I (signe de h') ;
3. en déduire que le minimum de h sur I est positif ou nul.

Autre outil : une courbe convexe est au-dessus de ses tangentes, une courbe concave au-dessous.

EXEMPLE RÉSOLU

Montrer que $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ pour tout $x \geq 0$.

Solution. Soit $h(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}$ sur $[0; +\infty[$. $h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{1+x}} \geq 0$ car

$\sqrt{1+x} \geq 1$.

h est croissante sur $[0; +\infty[$ et $h(0) = 0$, donc $h(x) \geq 0$: $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Interprétation : la droite $y = 1 + \frac{x}{2}$ est la tangente en 0 à la courbe concave de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

16. Symétries et périodicité

عناصر التماثل والدورية

PROPRIÉTÉS

Soit D l'ensemble de définition de f .

- **Axe de symétrie** $x = a$: pour tout $x \in D$, $2a - x \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- **Centre de symétrie** $\Omega(a; b)$: pour tout $x \in D$, $2a - x \in D$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
- Cas particuliers : f **paire** (axe $x = 0$), f **impaire** (centre O).
- f est **périodique** de période $T > 0$ si, pour tout $x \in D$, $x + T \in D$ et $f(x + T) = f(x)$; on étudie alors f sur un intervalle de longueur T .

Une symétrie ou une période permet de **réduire l'intervalle d'étude**.

EXEMPLE RÉSOLU

Montrer que la droite $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe de $f(x) = x^2 - 4x$.

Solution. $D = \mathbb{R}$, donc pour tout x , $4 - x \in D$.

$$f(4 - x) = (4 - x)^2 - 4(4 - x) = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x = x^2 - 4x = f(x).$$

Donc la droite $x = 2$ est un axe de symétrie : il suffit d'étudier f sur $[2; +\infty[$.

17. Branches infinies

الفروع اللانهائية

À RETENIR

Si...	Alors...
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	la droite $x = a$ est asymptote verticale
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	la droite $y = b$ est asymptote horizontale
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$	branche parabolique de direction l'axe (Oy)
... et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	branche parabolique de direction l'axe (Ox)
... et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$, puis $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$	la droite $y = ax + b$ est asymptote oblique
... et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$	branche parabolique de direction la droite $y = ax$

Exemples simples (un par cas, avec sa courbe dans la capsule vidéo 8/8) :

Exemple	Calcul	Conclusion
$f(x) = \frac{1}{x-2}$	$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$	asymptote verticale $x = 2$
$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$	asymptote horizontale $y = 2$
$f(x) = x^2$	$\frac{f(x)}{x} = x \rightarrow \pm\infty$	branche parabolique de direction (Oy)
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ en $+\infty$	branche parabolique de direction (Ox)
$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$	$\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$	asymptote oblique $y = x + 1$
$f(x) = x + \sqrt{x}$	$\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$	branche parabolique de direction $y = x$

Position relative de (C_f) et d'une asymptote (Δ) : $y = ax + b$: étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Étudier les branches infinies de (C_f) et sa position par rapport à la droite $(\Delta) : y = x - 1$.

Solution. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$: la droite $x = 2$ est asymptote verticale.

En $\pm\infty$: $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x-2} \rightarrow 0$: (Δ) est asymptote oblique.

Position : $\frac{1}{x-2} > 0$ pour $x > 2$ ((C_f) au-dessus de (Δ)) et < 0 pour $x < 2$ ((C_f) au-dessous).

18. Méthode : plan d'étude d'une fonction

طريقة : خطة دراسة دالة

MÉTHODE

1. Ensemble de définition ; parité, symétrie ou période pour réduire l'intervalle d'étude.
2. Limites aux bornes ; continuité et dérivabilité aux points particuliers (bornes fermées, raccords).
3. Dérivée, signe de la dérivée, tableau de variations.
4. Branches infinies et position par rapport aux asymptotes.
5. Dérivée seconde et concavité si on le demande.
6. Points particuliers (intersection avec les axes, tangentes) puis tracé de la courbe.

EXEMPLE RÉSOLU

Étudier $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Solution. Symétrie : $f(-x) = -f(x)$: f est impaire, on l'étudie sur $]0; +\infty[$ (centre de symétrie O).

Variations : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$: f décroît sur $]0; 1]$, croît sur $[1; +\infty[$; minimum $f(1) = 2$.

Branches infinies : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$: asymptote verticale $x = 0$. $f(x) - x = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$: asymptote oblique $y = x$, et (C_f) est au-dessus car $\frac{1}{x} > 0$.

Concavité : $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ sur $]0; +\infty[$: courbe convexe. On complète la courbe par symétrie de centre O .

★ À retenir

ما يجب تذكره

★ À RETENIR

- Dérivable $\Rightarrow$ continue, jamais l'inverse.
- La limite du taux de variation décide : nombre dérivé, demi-tangente ou tangente verticale.
- Composée : ne pas oublier le facteur u' .
- Réciproque : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ avec $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) \neq 0$.
- Monotonie : signe de f' , sur un intervalle. Extremum : f' s'annule **et change de signe**.
- Concavité : signe de f'' ; inflexion : f'' s'annule **et change de signe**.
- Asymptote oblique : $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, puis $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$.

✗ Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

- ✗ « f est continue en x_0 , donc dérivable en x_0 . »
- ✓ Faux : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable. Dérivable $\Rightarrow$ continue, pas l'inverse.



- ✗ « La limite du taux de variation est $+\infty$, donc pas de tangente. »
- ✓ f n'est pas dérivable, mais la courbe admet une tangente (ou demi-tangente) **verticale**.

- ✗ « $(\sin 3x)' = \cos 3x$. »
- ✓ Ne pas oublier le facteur u' : $(\sin 3x)' = 3 \cos 3x$.

- ✗ « $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$. »
- ✓ On divise par $f'(x_0)$, où x_0 est l'antécédent : $f(x_0) = y_0$.

- ✗ « $f'(x_0) = 0$, donc f admet un extremum en x_0 . »
- ✓ Il faut que f' change de signe : $x \mapsto x^3$ n'a pas d'extremum en 0.

- ✗ Annoncer une asymptote oblique sans calcul.
- ✓ Montrer que $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0 ; si la limite de $f(x) - ax$ est infinie, c'est une branche parabolique.

**MONSUPERPROF IA**

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.

