



Chapitre : Dérivation et étude de fonctions

الاشتقاق ودراسة الدوال



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

■ Dérivabilité en un point, à droite, à gauche

■ DÉFINITIONS

- f est **dérivable** en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$; on note $f'(x_0) = \ell$.
- Même définition à droite ($x \rightarrow x_0^+$) et à gauche ($x \rightarrow x_0^-$) : $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$.
- f dérivable en $x_0 \iff f$ dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
- Dérivable en $x_0 \Rightarrow$ continue en x_0 ; la réciproque est fausse ($|x|$ en 0).

★ Interprétation géométrique

★ À RETENIR

- Tangente en $A(x_0 ; f(x_0))$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; horizontale si $f'(x_0) = 0$.
- $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$: deux demi-tangentes, A est un **point anguleux**.
- Limite du taux de variation infinie : f non dérivable, tangente (ou demi-tangente) **verticale** $x = x_0$.
- Approximation affine : $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pour x proche de x_0 .

🔺 Dérivées usuelles et opérations

🔺 PROPRIÉTÉS

- $(x^n)' = nx^{n-1}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$) ; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$.
- $(u + v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ là où $u > 0$.

🔺 Dérivée d'une fonction composée

🔺 PROPRIÉTÉS

- Si f est dérivable en x et g en $f(x)$: $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.
- $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$; $(\cos u)' = -u' \sin u$; $(\sin u)' = u' \cos u$.

Calculer une limite avec un nombre dérivé

MÉTHODE

Reconnaître $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (ou $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$) : si f est dérivable en a , la limite vaut $f'(a)$. Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \cos 0 = 1.$$

Dérivée, monotonie et extremums

THÉORÈME

- Sur un **intervalle** I : $f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante ; $f' \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante ; $f' = 0 \Rightarrow f$ constante (strictement si f' ne s'annule qu'en des points isolés).
- Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, $f(x_0)$ est un extremum local.
- Optimisation : exprimer la grandeur en fonction d'une variable, étudier ses variations, lire le maximum ou le minimum.

Dérivée de la fonction réciproque

THÉORÈME

- f continue et strictement monotone sur I admet une réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.
- Si f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Racine n -ième et puissances rationnelles

PROPRIÉTÉS

- Sur $]0; +\infty[$: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ et, pour $r \in \mathbb{Q}^*$, $(x^r)' = rx^{r-1}$.
- Si $u > 0$: $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$.

Dérivée seconde et concavité

PROPRIÉTÉS

- $f'' \geq 0$ sur I : courbe **convexe**, au-dessus de ses tangentes ; $f'' \leq 0$: courbe **concave**, au-dessous.
- f'' s'annule en x_0 **en changeant de signe** : $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion.
- Inégalité $f \leq g$ sur I : étudier le signe de $h = g - f$ (variations de h , minimum ≥ 0), ou utiliser la position par rapport à une tangente.

Symétries et périodicité

PROPRIÉTÉS

- Axe $x = a$: $2a - x \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$. Centre $\Omega(a; b)$: $2a - x \in D$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
- Paire : axe (Oy) ; impaire : centre O . Période T : $f(x + T) = f(x)$, on étudie sur un intervalle de longueur T .

★ Branches infinies

★ À RETENIR

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$: asymptote verticale $x = a$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$: asymptote horizontale $y = b$.
- Si $f(x) \rightarrow \pm\infty$: $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$ (branche parabolique de direction (Oy)) ; $\rightarrow 0$ (direction (Ox)) ; $\rightarrow a \neq 0$, puis $f(x) - ax \rightarrow b$: asymptote oblique $y = ax + b$ (si $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$: branche parabolique de direction $y = ax$).
- Position par rapport à $(\Delta) : y = ax + b$: signe de $f(x) - (ax + b)$.

🔧 Plan d'étude d'une fonction

🔧 MÉTHODE

1. Ensemble de définition ; parité, symétrie, période.
2. Limites aux bornes ; continuité et dérivabilité aux points particuliers.
3. Dérivée, signe, tableau de variations.
4. Branches infinies et positions.
5. Concavité si demandée.
6. Points particuliers et tangentes, puis tracé.

✗ Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

- ✗ « f est continue en x_0 , donc dérivable en x_0 . »
 ✓ Faux : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable. Dérivable $\Rightarrow$ continue, pas l'inverse.

- ✗ « La limite du taux de variation est $+\infty$, donc pas de tangente. »
 ✓ f n'est pas dérivable, mais la courbe admet une tangente (ou demi-tangente) **verticale**.

- ✗ « $(\sin 3x)' = \cos 3x$. »
 ✓ Ne pas oublier le facteur u' : $(\sin 3x)' = 3 \cos 3x$.

- ✗ « $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$. »
 ✓ On divise par $f'(x_0)$, où x_0 est l'antécédent : $f(x_0) = y_0$.

- ✗ « $f'(x_0) = 0$, donc f admet un extremum en x_0 . »
 ✓ Il faut que f' change de signe : $x \mapsto x^3$ n'a pas d'extremum en 0.

- ✗ Annoncer une asymptote oblique sans calcul.
 ✓ Montrer que $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0 ; si la limite de $f(x) - ax$ est infinie, c'est une branche parabolique.

★ Tableau récapitulatif des formules

Formule	Conditions d'usage
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	Tangente en x_0 ; f dérivable en x_0
$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$	Condition de dérivabilité en x_0 (fonction par morceaux, valeur absolue)
$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	u, v dérivables ; $v \neq 0$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$ ($n \in \mathbb{Z}$ si $u \neq 0$)
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$	f dérivable en x , g dérivable en $f(x)$
$(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$; $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$	a, b réels
$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$	$f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) \neq 0$
$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$; $(x^r)' = rx^{r-1}$	$u > 0$; $x > 0, r \in \mathbb{Q}^*$
$f' \geq 0$ sur $I \Rightarrow f$ croissante	I intervalle (conclure intervalle par intervalle)
$f'' \geq 0$: convexe ; $f'' \leq 0$: concave	Inflexion : f'' s'annule et change de signe
$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$	Asymptote oblique $y = ax + b$ ($a \neq 0, b$ réel)

MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.