



Chapitre : Les primitives

الدوال الأصلية



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

💡 SITUATION DÉCLENCHANTE وضعية انطلاق

Un mobile roule en ligne droite. À l'instant t (en secondes), sa **vitesse** vaut $v(t) = 2t + 1$ (en m/s), et il part de la position 0. Où est-il au bout de 3 s ?

Au chapitre 2, on a vu que la vitesse est la **dérivée** de la position. On cherche donc une fonction x telle que $x'(t) = 2t + 1$: la fonction $x(t) = t^2 + t$ convient, car sa dérivée est $2t + 1$. Mais $t^2 + t + 5$ a la même dérivée ! C'est la position de départ $x(0) = 0$ qui choisit la bonne : $x(t) = t^2 + t$, donc $x(3) = 9 + 3 = 12$ m.

Dans ce chapitre, on apprend à faire ce « chemin inverse » de la dérivation : chercher une fonction à partir de sa dérivée. Une telle fonction s'appelle une **primitive**.

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE أهداف الفصل

- Savoir ce qu'est une primitive et vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre.
- Déterminer toutes les primitives d'une fonction, et celle qui vérifie une condition donnée.
- Utiliser le tableau des primitives usuelles et les formules de dérivation « à l'envers ».
- Reconnaître une forme $u'u^n$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$... et ajuster une constante.

1. Primitive d'une fonction sur un intervalle

الدالة الأصلية لدالة على مجال

■ DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I . On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

Pour **vérifier** qu'une fonction F donnée est une primitive de f , il suffit donc de **dériver** F et de retrouver f . C'est une question très fréquente à l'examen national : « Montrer que H est une primitive de h ».

EXEMPLE RÉSOLU

1) Vérifier que $F(x) = x^3 - 2x + 5$ est une primitive de $f(x) = 3x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$. 2) Montrer que $H(x) = \frac{x}{x+1}$ est une primitive de $h(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ sur $] -1; +\infty[$.

Solution. 1) F est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $F'(x) = 3x^2 - 2 = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) H est dérivable sur $] -1; +\infty[$ (quotient de polynômes, $x+1 \neq 0$) et $H'(x) = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = h(x)$. Donc H est une primitive de h sur cet intervalle.

2. Existence et ensemble des primitives

وجود الدوال الأصلية ومجموعتها

THÉORÈME

- **Existence (admis) :** toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I . Les polynômes, les fonctions rationnelles, $\sin$, $\cos$ et $\sqrt{}$ ont donc des primitives sur chaque intervalle où elles sont continues.
- **Toutes les primitives :** si F est une primitive de f sur I , alors les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + c$, où c est une constante réelle.

Autrement dit, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle **diffèrent d'une constante** : si $F' = G' = f$, alors $(G - F)' = 0$ sur l'intervalle I , donc $G - F$ est constante.

ATTENTION

quand on demande « les primitives » ou « l'ensemble des primitives », il ne faut pas oublier la constante c .

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = 2x + 5$ sur $\mathbb{R}$. Donner une primitive de f , puis toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Solution. $F(x) = x^2 + 5x$ est une primitive de f , car $F'(x) = 2x + 5$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto x^2 + 5x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ (par exemple $x^2 + 5x + 3$ ou $x^2 + 5x - 4$).

3. Primitive vérifiant une condition

الدالة الأصلية التي تحقق شرطاً

PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction qui admet des primitives sur un intervalle I . Pour tout x_0 de I et tout réel y_0 , il existe **une seule** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Méthode : on écrit toutes les primitives $F(x) = G(x) + c$, on remplace x par x_0 dans F , puis on résout l'équation $F(x_0) = y_0$ d'inconnue c .

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4$ sur $\mathbb{R}$. 1) Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$. 2) Déterminer la primitive G de f telle que $G(1) = 4$.

Solution. 1) Les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 4x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2) $G(1) = 4 \iff \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + 4 + c = 4 \iff -\frac{3}{10} + c = 0 \iff c = \frac{3}{10}$.

Donc $G(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 4x + \frac{3}{10}$.

4. Primitive d'une somme et d'un produit الدالة الأصلية لمجموع دالتين ولجاء دالة في عدد حقيقي

PROPRIÉTÉS

Si F et G sont des primitives de f et g sur un intervalle I , et si α et β sont des réels, alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I ;
- αF est une primitive de αf sur I ;
- plus généralement, $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I .

On cherche donc une primitive **terme par terme**, par exemple pour un polynôme.

ATTENTION

il n'existe pas de règle de ce type pour un **produit** ou un **quotient** : une primitive de fg n'est pas FG .

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

Solution. Terme par terme : $x^3 \rightarrow \frac{x^4}{4}$, $-2x^2 \rightarrow -\frac{2x^3}{3}$, $3x \rightarrow \frac{3x^2}{2}$, $-5 \rightarrow -5x$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

★ 5. Primitives des fonctions usuelles الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية

★ À RETENIR

On lit le tableau des dérivées du chapitre 2 « à l'envers ». Chaque ligne donne **une** primitive sur l'intervalle indiqué ; **toutes** les primitives s'obtiennent en ajoutant une constante c . Le cas $n = 0$ ($x^0 = 1$) est la première ligne ($k = 1$).

Fonction f	Une primitive F	Sur l'intervalle
k ($k \in \mathbb{R}$)	kx	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$
x^r ($r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -1$)	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$] 0 ; +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Avec les racines (chapitre 1) : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ a pour primitive $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, et $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ a pour primitive $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}$, sur $] 0 ; +\infty[$.

ATTENTION

la formule de x^r exige $r \neq -1$. La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ existe (la fonction est continue sur $]0; +\infty[$), mais elle sera étudiée au chapitre 5, avec le **logarithme népérien**.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de **1**) $f(x) = 4x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; **2**) $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$.

Solution. **1**) $4x^3 \rightarrow x^4$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x}$. Donc $F(x) = x^4 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$.

2) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Donc $G(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{x}$.

6. Primitives de $x \mapsto f(ax + b)$

الدوال الأصلية لدالة من الشكل $x \mapsto f(ax+b)$

PROPRIÉTÉS

Si F est une primitive de f et si $a \neq 0$, alors $x \mapsto \frac{1}{a} F(ax + b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax + b)$ (sur un intervalle où $ax + b$ reste dans l'intervalle de f). En particulier :

- $\cos(ax + b) \rightarrow \frac{1}{a} \sin(ax + b)$;
- $\sin(ax + b) \rightarrow -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$;
- $(ax + b)^n \rightarrow \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

ATTENTION

ne pas oublier le facteur $\frac{1}{a}$: une primitive de $\cos(3x)$ est $\frac{1}{3} \sin(3x)$, et non $\sin(3x)$.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de **1**) $f(x) = \cos(2x - 1) + \sin(3x)$; **2**) $g(x) = (3x - 1)^4$.

Solution. **1**) $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x - 1) - \frac{1}{3} \cos(3x)$.

2) $a = 3$ et $n = 4$: $G(x) = \frac{(3x - 1)^5}{3 \times 5} = \frac{(3x - 1)^5}{15}$. Vérification : $G'(x) = \frac{5 \times 3 (3x - 1)^4}{15} = (3x - 1)^4$.

★ 7. Primitives et formules de dérivation

الدوال الأصلية وصيغ الاشتقاق

★ À RETENIR

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I (« — » : aucune autre condition). Les formules de dérivation du chapitre 2, lues à l'envers, donnent :

Fonction f	Une primitive F	Condition sur I
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	—
$u'u^r$ ($r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -1$)	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$u > 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\frac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ ($n \geq 2$)	$n\sqrt[n]{u}$	$u > 0$
$u'v + uv'$	uv	—
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	$v \neq 0$

Par exemple, $(u^{n+1})' = (n+1)u'u^n$, donc $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $u'u^n$.

✏ EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer une primitive de **1)** $f(x) = \cos x (\sin x)^4$ sur $\mathbb{R}$; **2)** $g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$; **3)** $h(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}}$ sur $]0; +\infty[$.

Solution. **1)** $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$: $f = u'u^4$, donc $F(x) = \frac{(\sin x)^5}{5}$.

2) $u(x) = x^2 + 1$: $g = \frac{u'}{u^2}$, donc $G(x) = -\frac{1}{x^2+1}$.

3) $u(x) = x^2 + 3x$, $u'(x) = 2x + 3$ et $u(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$: $h = \frac{u'}{\sqrt{u}}$, donc $H(x) = 2\sqrt{x^2+3x}$.

🔧 8. Méthode : reconnaître une forme et ajuster une constante

طريقة: التعرف على الشكل وضبط ثابتة

🔧 MÉTHODE

- Repérer une fonction u dont la dérivée u' apparaît (à une constante près).
- Si f n'est pas exactement de la forme du tableau, faire apparaître u' en multipliant et en divisant par la même constante.
- Appliquer la formule.
- Vérifier en dérivant** le résultat.

⚠ ATTENTION

une primitive de $x(x^2+1)^3$ n'est pas $\frac{(x^2+1)^4}{4}$: il manque le facteur $\frac{1}{2}$.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer une primitive de **1)** $f(x) = x(x^2 + 1)^3$ sur $\mathbb{R}$; **2)** $g(x) = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$; **3)** $h(x) = \frac{1}{(3x + 2)^2}$ sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$.

Solution. 1) $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$. On écrit $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 + 1)^3 = \frac{1}{2} u' u^3$, donc $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + 1)^4}{4} = \frac{(x^2 + 1)^4}{8}$.

2) $(2x + 1)\sqrt{2x + 1} = (2x + 1)^{\frac{3}{2}}$. Avec $u(x) = 2x + 1 > 0$ et $u'(x) = 2$: $g(x) = \frac{1}{2} \times 2(2x + 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} u' u^{\frac{3}{2}}$, donc $G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x + 1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{(2x + 1)^2 \sqrt{2x + 1}}{5}$.

3) $u(x) = 3x + 2$, $u'(x) = 3$: $h(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{(3x + 2)^2}$, donc $H(x) = -\frac{1}{3(3x + 2)}$.

9. Méthode : transformer l'expression avant de primitiver

طريقة: تحويل التعبير قبل البحث عن دالة أصلية

MÉTHODE

Quand aucune forme du tableau n'apparaît, on transforme d'abord l'expression :

- développer ou simplifier ;
- écrire une fonction rationnelle sous la forme $ax + b + \frac{c}{(x - d)^2}$ (l'énoncé guide en général) ;
- utiliser $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Soit $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x - 2)^2}$ sur $]2; +\infty[$. Vérifier que $f(x) = x + 1 + \frac{3}{(x - 2)^2}$, puis déterminer les primitives de f . **2)** Déterminer une primitive de $g(x) = \tan^2 x$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. **3)** Déterminer une primitive de $h(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2\sqrt{x})$ sur $]0; +\infty[$.

Solution. 1) $(x + 1)(x - 2)^2 + 3 = (x + 1)(x^2 - 4x + 4) + 3 = x^3 - 3x^2 + 4 + 3 = x^3 - 3x^2 + 7$, d'où l'écriture demandée. Avec $\frac{1}{(x - 2)^2} \rightarrow -\frac{1}{x - 2}$: les primitives de f sont $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{x - 2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2) $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$, donc $G(x) = \tan x - x$.

3) On développe : $h(x) = x^{\frac{5}{2}} + 2x$. Donc $H(x) = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + x^2 = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + x^2$.

10. Pour aller plus loin : fonction définie par morceaux

دالة معرفة بأجزاء

MÉTHODE

Pour une fonction définie par morceaux :

- vérifier qu'elle est **continue** au point de raccord (elle admet alors des primitives sur $\mathbb{R}$) ;
- chercher une primitive sur chaque morceau, avec deux constantes ;
- choisir les constantes pour que les deux expressions donnent **la même valeur** au point de raccord (et la condition demandée) ;
- justifier** que la fonction obtenue est une primitive sur $\mathbb{R}$: sur chaque morceau, $F' = f$; au point de raccord, F est continue, et ses dérivées à gauche et à droite sont égales à la valeur de f en ce point, justement parce que f y est continue. Donc F est dérivable en ce point et $F' = f$ partout.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = 2x + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = -x + 4$ si $x > 1$. **1)** Montrer que f est continue en 1. **2)** Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 0$.

Solution. **1)** $f(1) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 4) = 3$: f est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$.

2) Pour $x \leq 1$: $F(x) = x^2 + x + a$; pour $x > 1$: $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x + b$. $F(1) = 0$ donne $1 + 1 + a = 0$, soit $a = -2$. Pour que F soit continue en 1 : $-\frac{1}{2} + 4 + b = 0$, soit $b = -\frac{7}{2}$.

$F(x) = x^2 + x - 2$ si $x \leq 1$ et $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{7}{2}$ si $x > 1$. **Justification :** pour $x < 1$, $F'(x) = 2x + 1 = f(x)$; pour $x > 1$, $F'(x) = -x + 4 = f(x)$. En 1, F est continue (les deux expressions valent 0), sa dérivée à gauche vaut $2 \times 1 + 1 = 3$ et sa dérivée à droite $-1 + 4 = 3$: elles sont égales à $f(1) = 3$. Donc F est dérivable en 1 avec $F'(1) = f(1)$: F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Carte : quelle forme reconnaître ?

خريطة: أي شكل تتعرف عليه؟

MÉTHODE

Je vois...	Je pense à...	Une primitive
un polynôme, une somme	terme par terme	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour chaque x^n
$\cos(ax + b)$, $\sin(ax + b)$, $(ax + b)^n$	le facteur $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$...
un produit où l'on reconnaît u' et une puissance de u	$u'u^n$ (ajuster la constante)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
un quotient avec u^2 au dénominateur	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
un quotient avec $\sqrt{u}$ au dénominateur	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
aucune forme visible	transformer : développer, décomposer, $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$	puis recommencer

Dans tous les cas : **vérifier en dérivant.**

★ À retenir

ما يجب تذكره

★ À RETENIR

- F primitive de f sur I : $F' = f$ sur I . Pour vérifier, on **dérive**.
- Toutes les primitives : $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Une condition $F(x_0) = y_0$ fixe c .
- Somme et produit par un réel : terme par terme ; **pas** de règle pour un produit ou un quotient.
- $\sin x \rightarrow -\cos x$; $\cos(ax + b) \rightarrow \frac{1}{a} \sin(ax + b)$.
- $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u}$; $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$: faire apparaître u' en ajustant une constante.
- Toujours préciser l'**intervalle** ; la primitive de $\frac{1}{x}$: chapitre 5 (logarithme népérien).

✗ Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ Oublier la constante quand on demande « les primitives ».

✓ Les primitives de $4x^3$ sont les fonctions $x^4 + c$, $c \in \mathbb{R}$ — pas seulement x^4 .

✗ « Une primitive de $\sin x$ est $\cos x$. »

✓ $(\cos x)' = -\sin x$: une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$.

✗ « Une primitive de $\cos(3x)$ est $\sin(3x)$. »

✓ $(\sin(3x))' = 3\cos(3x)$: il faut le facteur $\frac{1}{3}$, une primitive est $\frac{1}{3}\sin(3x)$.

✗ « Une primitive de $x(x^2 + 1)^3$ est $\frac{(x^2 + 1)^4}{4}$. »

✓ $u' = 2x$, pas x : on ajuste avec $\frac{1}{2}$, une primitive est $\frac{(x^2 + 1)^4}{8}$.

✗ « Une primitive d'un produit est le produit des primitives. »

✓ Faux : $x \cdot x = x^2$ a pour primitive $\frac{x^3}{3}$, et non $\frac{x^2}{2} \times \frac{x^2}{2}$. Chercher une forme $u'u^n$ ou $u'v + uv'$.

✗ Donner une primitive sans intervalle.

✓ $\frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$, jamais « sur $\mathbb{R}$ » ; $\sqrt{u}$ exige $u > 0$.

MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.