



Chapitre : Les primitives

الدوال الأصلية



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

■ Primitive d'une fonction

■ DÉFINITIONS

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et $F' = f$ sur I . Pour vérifier : on dérive.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (admis).
- Si F est une primitive de f sur I , toutes les primitives sont $x \mapsto F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- Une seule primitive vérifie $F(x_0) = y_0$: on calcule c avec cette condition.

▲ Opérations

▲ PROPRIÉTÉS

- $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$: on travaille terme par terme.
- Aucune règle pour un produit ou un quotient : on cherche une forme du tableau des formules.

★ Primitives usuelles

★ À RETENIR

- $k \rightarrow kx$; $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathbb{R}$.
- $\frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^n} \rightarrow -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ ($n \geq 2$) sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.
- $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x}$; $x^r \rightarrow \frac{x^{r+1}}{r+1}$ ($r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -1$) sur $]0; +\infty[$.
- $\cos x \rightarrow \sin x$; $\sin x \rightarrow -\cos x$; $1 + \tan^2 x \rightarrow \tan x$.
- La primitive de $\frac{1}{x}$ sera étudiée au chapitre 5 (logarithme népérien).

★ Formules de dérivation à l'envers

★ À RETENIR

- $f(ax + b) \rightarrow \frac{1}{a} F(ax + b) : \cos(ax + b) \rightarrow \frac{1}{a} \sin(ax + b), \sin(ax + b) \rightarrow -\frac{1}{a} \cos(ax + b).$
- $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1} ; u'u^r \rightarrow \frac{u^{r+1}}{r+1} (u > 0).$
- $\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u} ; \frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u} ; u'v + uv' \rightarrow uv ; \frac{u'v - uv'}{v^2} \rightarrow \frac{u}{v}.$

🔧 Méthodes

🔧 MÉTHODE

- **Reconnaître et ajuster** : repérer u et u' , faire apparaître u' avec une constante, appliquer la formule, vérifier en dérivant.
- **Transformer d'abord** : développer, décomposer en $ax + b + \frac{c}{(x-d)^2}$, écrire $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1.$
- **Par morceaux** : vérifier la continuité, primitiver chaque morceau, raccorder les constantes.

✗ Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ Oublier la constante quand on demande « les primitives ».

✓ Les primitives de $4x^3$ sont les fonctions $x^4 + c, c \in \mathbb{R}$ — pas seulement x^4 .

✗ « Une primitive de $\sin x$ est $\cos x$. »

✓ $(\cos x)' = -\sin x$: une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$.

✗ « Une primitive de $\cos(3x)$ est $\sin(3x)$. »

✓ $(\sin(3x))' = 3\cos(3x)$: il faut le facteur $\frac{1}{3}$, une primitive est $\frac{1}{3}\sin(3x)$.

✗ « Une primitive de $x(x^2 + 1)^3$ est $\frac{(x^2 + 1)^4}{4}$. »

✓ $u' = 2x$, pas x : on ajuste avec $\frac{1}{2}$, une primitive est $\frac{(x^2 + 1)^4}{8}$.

✗ « Une primitive d'un produit est le produit des primitives. »

✓ Faux : $x \cdot x = x^2$ a pour primitive $\frac{x^3}{3}$, et non $\frac{x^2}{2} \times \frac{x^2}{2}$. Chercher une forme $u'u^n$ ou $u'v + uv'$.

✗ Donner une primitive sans intervalle.

✓ $\frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$, jamais « sur $\mathbb{R}$ » ; $\sqrt{u}$ exige $u > 0$.

★ Tableau récapitulatif des formules

Formule	Conditions d'usage
$F' = f$ sur I	Définition d'une primitive sur un intervalle
$F(x) + c, c \in \mathbb{R}$	Toutes les primitives ; $F(x_0) = y_0$ fixe c
$x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}^*,$ sur $\mathbb{R}$
$x^r \rightarrow \frac{x^{r+1}}{r+1}$	$r \in \mathbb{Q}, r \neq -1,$ sur $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x} ; \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x}$	Sur un intervalle où la fonction est définie
$\cos x \rightarrow \sin x ; \sin x \rightarrow -\cos x$	Sur $\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x \rightarrow \tan x$	Sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$
$f(ax + b) \rightarrow \frac{1}{a}F(ax + b)$	$a \neq 0$
$u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}^* ;$ avec $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : u > 0$
$\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u} ; \frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$	$u \neq 0 ; u > 0$
$u'v + uv' \rightarrow uv ; \frac{u'v - uv'}{v^2} \rightarrow \frac{u}{v}$	u, v dérivables ; $v \neq 0$

MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.