



Chapitre : Suites numériques

المتتاليات العددية



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

💡 SITUATION DÉCLENCHANTE وضعية انطلاق

Karim place 10 000 DH sur un compte qui rapporte 4 % d'intérêts par an. Chaque année, son capital est multiplié par 1,04. Au bout de combien d'années aura-t-il doublé son capital ? Que devient le capital après de très nombreuses années ? Ce chapitre donne les outils pour répondre : suites géométriques, limites et convergence.

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE أهداف الدرس

- Utiliser les suites arithmétiques et géométriques pour étudier des suites $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$.
- Déterminer la limite d'une suite avec les suites de référence et les critères de convergence.
- Déterminer la limite de $f(u_n)$ lorsque f est continue.
- Étudier la convergence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer sa limite.

1. Rappels : suites majorées, minorées, bornées, monotones

تذكير : متتالية مكبورة، مصغورة، محدودة، رتيبة

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $(\forall n \in I) u_n \leq M$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $(\forall n \in I) u_n \geq m$.
- (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée ; c'est le cas dès qu'il existe $S \geq 0$ tel que $|u_n| \leq S$.
- (u_n) est **croissante** si $(\forall n \in I) u_{n+1} - u_n \geq 0$, **décroissante** si $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- Si $u_n > 0$: (u_n) est croissante $\iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

⚠️ ATTENTION

les réels M et m sont des constantes, ils ne dépendent pas de n . Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est croissante et bornée.

Solution. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, donc (u_n) est croissante.

De plus $u_n \geq 0$ et $u_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$: on a $0 \leq u_n < 1$, donc (u_n) est bornée.

2. Méthode : le raisonnement par récurrence

طريقة : الاستدلال بالترجع

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : soit $n \geq n_0$; supposer $P(n)$ vraie et démontrer $P(n+1)$.
3. **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

EXEMPLE TYPE EXAMEN

montrer que $2 \leq u_n \leq 4$ quand $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}$: on part de $2 \leq u_n \leq 4$, on encadre $1 + u_n$, puis $\frac{6}{1+u_n}$, puis u_{n+1} .

EXEMPLE RÉSOLU

Fil conducteur. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. Initialisation : $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 2$.

Hérédité : supposons $0 \leq u_n \leq 2$. Alors $2 \leq 2 + u_n \leq 4$, donc $\sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2$, c'est-à-dire $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$; en particulier $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Conclusion : $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Suites arithmétiques et géométriques

المتتاليات الحسابية والهندسية

	Arithmétique de raison r	Géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p q^{n-p}$
Somme $u_p + \dots + u_n$	$\frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$	$u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$
Trois termes consécutifs x, y, z	$2y = x + z$	$y^2 = xz$

Dans les deux sommes, $n - p + 1$ est le **nombre de termes**.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$. Exprimer u_n puis $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n .

Solution. (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$, donc $u_n = 3 \times 2^n$.

S_n compte $n + 1$ termes : $S_n = u_0 \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 3(2^{n+1} - 1)$. Vérification :

$$S_1 = 3 + 6 = 9 = 3(4 - 1).$$

4. Limites des suites de référence**نهايات المتتاليات المرجعية**

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n^p} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt[n]{n}} = 0$.

Pour $r \in \mathbb{Q}^*$: si $r > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$; si $r < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$.

Les opérations sur les limites de fonctions (somme, produit, quotient, formes indéterminées) restent valables pour les suites.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - n}{n^2 + 1}$.

Solution. On factorise par n^2 : $\frac{3n^2 - n}{n^2 + 1} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - n}{n^2 + 1} = \frac{3}{1} = 3$.

5. Limite de la suite (q^n) **نهاية متتالية هندسية**

- Si $q > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$: la suite (q^n) n'a pas de limite.

EXEMPLE

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$; $\frac{4^n}{3^{2n}} = \left(\frac{4}{9}\right)^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{3^{2n}} = 0$.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n - 2^n)$.

Solution. Forme $+\infty - \infty$: on factorise par 3^n . $3^n - 2^n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

$3 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$; $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n - 2^n) = +\infty$.

6. Convergence et limite**التقارب والنهاية**

Une suite est **convergente** si elle admet une limite finie ℓ ; sinon elle est **divergente** (limite infinie ou pas de limite). La limite, quand elle existe, est **unique**.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

Passage à la limite dans une inégalité : si (u_n) et (v_n) convergent et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Une inégalité stricte devient large : $u_n < 2$ donne seulement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 2$.

7. Critères de convergence (comparaison)**معايير التقارب (المقارنة)**

À partir d'un certain rang :

- si $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;
- si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$;
- **Gendarmes** : si $w_n \leq u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$;
- si $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

MÉTHODE TYPE EXAMEN

montrer $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ avec $0 < k < 1$, en déduire par récurrence $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$, puis conclure car $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \cos n)$.

Solution. $\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Comme $\cos n \geq -1$, on a $n + \cos n \geq n - 1$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \cos n) = +\infty$.

8. Suite monotone et bornée

متتالية رتيبة ومحدودة

- Toute suite **croissante et majorée** est convergente.
- Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.

⚠ ATTENTION

ce théorème donne la convergence, pas la valeur de la limite. Une suite croissante majorée par 5 converge vers une limite $\ell \leq 5$, pas forcément égale à 5.

🔧 EXEMPLE RÉSOLU

Fil conducteur (suite). Avec $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $0 \leq u_n \leq 2$, montrer que (u_n) converge.

Solution. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$.

Comme $0 \leq u_n \leq 2$: $2 - u_n \geq 0$, $1 + u_n > 0$ et $\sqrt{2 + u_n} + u_n > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: (u_n) est croissante.

(u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle est convergente.

9. Suites $v_n = f(u_n)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

متتاليات مرتبطة بدالة

Suite $v_n = f(u_n)$: si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Exemple :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3n-4}{2n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue sur un intervalle I , si $f(I) \subset I$, si $u_{n_0} \in I$ et si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ dans I .

⚠ ATTENTION

on ne résout $f(\ell) = \ell$ qu'après avoir démontré la convergence, et on garde la solution compatible avec l'encadrement de (u_n) .

🔧 EXEMPLE RÉSOLU

Fil conducteur (fin). Calculer la limite ℓ de la suite $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Solution. $f(x) = \sqrt{2 + x}$ est continue sur $I = [0, 2]$, $f(I) = [\sqrt{2}, 2] \subset I$, $u_0 \in I$ et (u_n) converge vers $\ell \in I$.

Donc $f(\ell) = \ell$: $\sqrt{2 + \ell} = \ell$, d'où $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$.

Comme $\ell \geq 0$, on retient $\ell = 2$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

* 10. Méthode : suite auxiliaire

طريقة : المتتالية المساعدة

Pour $u_{n+1} = au_n + b$ ou $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$, l'énoncé propose une suite auxiliaire (v_n) :

1. Calculer v_{n+1} en remplaçant u_{n+1} par son expression.

2. Faire apparaître $v_{n+1} = q v_n$ (géométrique) ou $v_{n+1} = v_n + r$ (arithmétique).
3. Écrire v_n en fonction de n , puis exprimer u_n en fonction de v_n .
4. Conclure sur la limite de (u_n) avec la limite de q^n .

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ et $v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, avec $v_0 = -2$.

Donc $v_n = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n + 2 = 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

★ L'essentiel à retenir

الأساسي الواجب إتقانه

★ À RETENIR — FORMULES ET RÉSULTATS CLÉS

Suite arithmétique	$u_n = u_p + (n - p)r$; $u_p + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$
Suite géométrique	$u_n = u_p q^{n-p}$; $u_p + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
Limite de q^n	$q > 1$: $+\infty$; $-1 < q < 1$: 0 ; $q \leq -1$: pas de limite
Gendarmes	$w_n \leq u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
Convergence monotone	croissante + majorée (ou décroissante + minorée) $\Rightarrow$ convergente
Suite récurrente	f continue, $f(I) \subset I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in I \Rightarrow f(\ell) = \ell$



✗ Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ « Croissante et majorée par M , donc elle converge vers M . ».

✓ Elle converge vers une limite $\ell \leq M$, pas forcément M .

✗ « $u_n < 2$ pour tout n , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < 2$. ».

✓ Le passage à la limite donne seulement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 2$.

✗ « $q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. ».

✓ Il faut $-1 < q < 1$; pour $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite.

✗ Oublier l'initialisation dans une récurrence.

✓ Toujours rédiger les trois étapes : initialisation, hérédité, conclusion.

✗ Résoudre $f(\ell) = \ell$ et garder une solution incompatible avec l'encadrement.

✓ Retenir la solution qui respecte l'encadrement démontré (ex. $\ell \geq 0$).



MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.