



Chapitre : Suites numériques



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

Suites majorées, minorées, bornées, monotones

- (u_n) **majorée** : il existe M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in I$; **minorée** : il existe m tel que $u_n \geq m$.
- **Bornée** : majorée et minorée, c'est-à-dire il existe $S \geq 0$ tel que $|u_n| \leq S$.
- **Croissante** : $u_{n+1} - u_n \geq 0$; **décroissante** : $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Si $u_n > 0$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Raisonnement par récurrence

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : supposer $P(n)$ vraie pour un $n \geq n_0$ et démontrer $P(n+1)$.
3. **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Suites arithmétiques et géométriques

- (u_n) arithmétique de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$; trois termes consécutifs x, y, z vérifient $2y = x + z$.
- (u_n) géométrique de raison q : $u_{n+1} = q u_n$; trois termes consécutifs vérifient $y^2 = xz$.
- Termes généraux et sommes : voir le tableau final.

Limites des suites de référence

- Pour $p \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$.
- Pour $r \in \mathbb{Q}^*$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$ si $r > 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$ si $r < 0$.
- Les opérations sur les limites (somme, produit, quotient, formes indéterminées) sont les mêmes que pour les fonctions.

★ Limite de la suite (q^n)

- $q > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$; $q = 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- $-1 < q < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- $q \leq -1$: (q^n) n'a pas de limite.

Convergence

- (u_n) est **convergente** si elle admet une limite finie ℓ (unique) ; sinon elle est **divergente**.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$.
- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si les deux suites convergent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ (une inégalité stricte devient large).

Critères de convergence (à partir d'un certain rang)

- $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- **Gendarmes** : $w_n \leq u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
- $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Suite monotone et bornée

- Toute suite **croissante et majorée** converge ; toute suite **décroissante et minorée** converge.
- Ce théorème donne l'existence de la limite, pas sa valeur : croissante et majorée par M donne $\ell \leq M$.

Suites $v_n = f(u_n)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue sur un intervalle I , $f(I) \subset I$, $u_{n_0} \in I$, et si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

* Étudier une suite $u_{n+1} = au_n + b$ ou $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$

1. Calculer v_{n+1} pour la suite auxiliaire (v_n) donnée par l'énoncé.
2. Montrer que $v_{n+1} = q v_n$ (géométrique) ou $v_{n+1} = v_n + r$ (arithmétique).
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. Conclure sur la limite de (u_n) avec celle de q^n .

* Majorer $|u_n - \ell|$ (méthode type examen)

1. Montrer que $|u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$ avec $0 < k < 1$.
2. En déduire par récurrence $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.
3. Conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.



✗ Erreurs fréquentes

- ✗ « Croissante et majorée par M , donc elle converge vers M . ».
- ✓ Elle converge vers une limite $\ell \leq M$, pas forcément M .
- ✗ « $u_n < 2$ pour tout n , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < 2$. ».
- ✓ Le passage à la limite donne seulement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 2$.
- ✗ « $q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. ».
- ✓ Il faut $-1 < q < 1$; pour $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite.
- ✗ Oublier l'initialisation dans une récurrence.
- ✓ Toujours rédiger les trois étapes : initialisation, hérédité, conclusion.
- ✗ Résoudre $f(\ell) = \ell$ et garder une solution incompatible avec l'encadrement.
- ✓ Retenir la solution qui respecte l'encadrement démontré (ex. $\ell \geq 0$).

★ Tableau récapitulatif des formules

Formule	Conditions d'usage
$u_n = u_p + (n - p)r$	(u_n) arithmétique de raison r , $n \geq p$
$u_p + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$	(u_n) arithmétique ; $n - p + 1$ termes
$u_n = u_p q^{n-p}$	(u_n) géométrique de raison q , $n \geq p$
$u_p + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$	(u_n) géométrique, $q \neq 1$ (si $q = 1$: somme = $(n - p + 1)u_p$)
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	$-1 < q < 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$	$r \in \mathbb{Q}^* : r > 0 ; r < 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$	Gendarmes : $w_n \leq u_n \leq v_n$, (v_n) et (w_n) de même limite ℓ
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$	$ u_n - \ell \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et f continue en ℓ
$f(\ell) = \ell$	$u_{n+1} = f(u_n)$, f continue sur I , $f(I) \subset I$, $u_{n_0} \in I$, (u_n) converge vers $\ell \in I$



MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.