



Chapitre : Les fonctions logarithmes

الدوال اللوغاريتمية



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

💡 SITUATION DÉCLENCHANTE وضعية انطلاق

Au chapitre 4, on a construit le tableau des primitives : pour $n \neq -1$, une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Mais pour $n = -1$, c'est-à-dire pour $f(x) = \frac{1}{x}$, la formule donnerait une division par 0 : **la case est restée vide**.

Pourtant $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc elle **admet des primitives** (résultat admis au chapitre 4). Si F en est une, les autres sont $F + c$, et une seule vaut 0 en $x = 1$. Cette primitive-là est une **nouvelle fonction**, qui ne s'écrit avec aucune fonction déjà connue : le **logarithme népérien**, noté $\ln$.

Dans ce chapitre, on apprend à la manipuler. Ses propriétés transforment les produits en sommes, ce qui permet de résoudre des équations et des inéquations jusqu'ici hors de portée, comme : « en combien d'années un capital placé à 5 % double-t-il ? »

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE أهداف الفصل

- Définir le logarithme népérien comme la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, et connaître le nombre e .
- Utiliser les propriétés algébriques de $\ln$ pour simplifier, exprimer et comparer.
- Résoudre des équations, des inéquations et des systèmes comportant des logarithmes (en vérifiant toujours la validité).
- Calculer les limites de référence de $\ln$ et lever des indéterminations.
- Étudier et représenter des fonctions comportant $\ln$; dériver $\ln(u)$ et déterminer les primitives de $\frac{u'}{u}$.
- Utiliser le logarithme de base a et le logarithme décimal (équations $10^x = a$, pH).

1. La fonction logarithme népérien

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

DÉFINITIONS

Définition. La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui **s'annule en 1**.

Elle existe : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc admet des primitives (chapitre 4), et une seule vaut 0 en 1.

Conséquences.

- $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$: **on ne peut calculer le logarithme ni de 0, ni d'un nombre négatif.**
- $\ln 1 = 0$.
- $\ln$ est dérivable (donc continue) sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Montrer que $G(x) = \ln x + 5$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. **2)** Déterminer la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui vaut 3 en 1.

Solution. 1) $G'(x) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$: G est bien une primitive.

2) Les primitives sont les fonctions $x \mapsto \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$. La condition $\ln 1 + c = 3$ donne $c = 3$: c'est la fonction $x \mapsto \ln x + 3$.

2. Sens de variation et signe de $\ln$

منحى تغيرات الدالة اللوغاريتمية وإشارتها

PROPRIÉTÉS

Comme $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$, la fonction $\ln$ est **strictement croissante**. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

- $\ln a = \ln b \iff a = b$;
- $\ln a < \ln b \iff a < b$ (l'ordre est conservé).

Comme $\ln 1 = 0$, on en déduit le signe de $\ln x$:

$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$\ln x < 0$	$\ln x = 0$	$\ln x > 0$

ATTENTION

ces équivalences ne sont valables que si a et b sont **strictement positifs**.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Donner le signe de $\ln(0,8)$ et de $\ln 3$. **2)** Comparer $\ln \frac{5}{3}$ et $\ln \frac{7}{4}$ sans calculatrice.

Solution. 1) $0,8 < 1$ donc $\ln(0,8) < 0$; $3 > 1$ donc $\ln 3 > 0$.

2) $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$ et $\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$, donc $\frac{5}{3} < \frac{7}{4}$. Comme $\ln$ est strictement croissante : $\ln \frac{5}{3} < \ln \frac{7}{4}$.

3. Le nombre e

العدد e

■ DÉFINITIONS

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et elle prend toutes les valeurs réelles (ses limites en 0 et en $+\infty$ sont étudiées dans la partie B). L'équation $\ln x = 1$ a donc **une seule solution** dans $]0; +\infty[$: on l'appelle e .

Définition. e est l'unique réel tel que $\ln e = 1$. On a $e \approx 2,718$.

À savoir. Pour tout rationnel r : $\ln(e^r) = r$ (la propriété 4 de la section suivante le justifie), et, pour $x > 0$: $\ln x = r \iff x = e^r$.

⚠ ATTENTION

$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$; ne pas les confondre. Et $\ln 0$ n'existe pas.

✏ EXEMPLE RÉSOLU

1) Résoudre $\ln x = 2$ puis $\ln x = -1$. 2) Calculer $\ln(e^5)$ et $\ln \frac{1}{e}$.

Solution. 1) $\ln x = 2 \iff x = e^2$; $\ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

2) $\ln(e^5) = 5$; $\ln \frac{1}{e} = \ln(e^{-1}) = -1$.

4. Propriétés algébriques

الخصائص الجبرية

■ PROPRIÉTÉS

Propriété. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout rationnel r :

1. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$: le logarithme **transforme les produits en sommes** ;
2. $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$;
3. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$;
4. $\ln(a^r) = r \ln a$; en particulier $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Preuve de la propriété 1. Fixons $a > 0$ et posons, pour $x > 0$, $g(x) = \ln(ax)$ et $h(x) = \ln x + \ln a$. On a $g'(x) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$ et $h'(x) = \frac{1}{x}$: g et h sont deux primitives de $\frac{1}{x}$, donc elles diffèrent d'une constante. Or $g(1) = \ln a$ et $h(1) = \ln 1 + \ln a = \ln a$: la constante est nulle, donc $g = h$.

Les autres propriétés s'en déduisent : $\ln b + \ln \frac{1}{b} = \ln 1 = 0$ donne la 2, puis $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b}$ donne la 3, et la 4 s'obtient en répétant la 1.

✏ EXEMPLE RÉSOLU

Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$: 1) $A = \ln 12$; 2) $B = \ln \frac{8}{9}$; 3) $C = \ln \sqrt{18}$.

Solution. 1) $A = \ln(2^2 \times 3) = 2 \ln 2 + \ln 3$.

2) $B = \ln 8 - \ln 9 = \ln(2^3) - \ln(3^2) = 3 \ln 2 - 2 \ln 3$.

3) $C = \frac{1}{2} \ln 18 = \frac{1}{2} \ln(2 \times 3^2) = \frac{1}{2} (\ln 2 + 2 \ln 3) = \frac{1}{2} \ln 2 + \ln 3$.

5. Simplifier, exprimer, comparer

التبسيط والتعبير والمقارنة

⚠ ATTENTION

Attention aux signes. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ exige $a > 0$ et $b > 0$. Si $a < 0$ et $b < 0$, le produit ab est positif mais $\ln a$ et $\ln b$ n'existent pas : on écrit $\ln(ab) = \ln |a| + \ln |b|$. De même, pour tout $x \neq 0$: $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$, alors que $2 \ln x$ n'existe que pour $x > 0$.

🔧 MÉTHODE

Ne pas confondre $(\ln x)^2$ (le logarithme, élevé au carré) et $\ln(x^2)$ (le logarithme du carré) : $(\ln 2)^2 \approx 0,48$ alors que $\ln 4 \approx 1,39$. Et il n'y a **aucune règle** pour $\ln(a + b)$.

🔧 EXEMPLE RÉSOLU

1) Simplifier $A = \ln(3 + \sqrt{3}) + \ln(3 - \sqrt{3})$. **2)** Les fonctions $f : x \mapsto \ln(x^2)$ et $g : x \mapsto 2 \ln x$ sont-elles égales ?

Solution. 1) Comme $\sqrt{3} < 3$, les deux nombres sont strictement positifs. $A = \ln[(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})] = \ln(9 - 3) = \ln 6$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}^*$ (car $x^2 > 0$ pour $x \neq 0$) alors que g n'est définie que sur $]0; +\infty[$: les ensembles de définition sont différents, donc $f \neq g$. Elles coïncident sur $]0; +\infty[$, mais pas sur $] -\infty; 0[$ où $f(x) = 2 \ln |x|$.

6. Équations logarithmiques

المعادلات اللوغاريتمية

🔧 MÉTHODE

Méthode.

- Déterminer l'**ensemble de validité** D : les réels pour lesquels chaque expression placée dans un $\ln$ est > 0 .
- Se ramener à $\ln u(x) = \ln v(x)$ (en regroupant avec les propriétés algébriques) ou à $\ln u(x) = k$.
- Utiliser $\ln u = \ln v \iff u = v$, ou $\ln u = k \iff u = e^k$.
- Garder seulement** les solutions qui appartiennent à D .

Changement d'inconnue. Pour $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$ (avec $x > 0$), on pose $X = \ln x$: $X^2 - X - 2 = 0$ donne $X = -1$ ou $X = 2$, donc $x = e^{-1}$ ou $x = e^2$.

🔧 EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre dans $\mathbb{R}$: **1)** $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln 3$; **2)** $\ln(2x + 1) = 2$.

Solution. 1) Validité : $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, soit $x > 1$: $D =]1; +\infty[$. Pour $x \in D$:

$\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln 3 \iff \ln[(x - 1)(x + 1)] = \ln 3 \iff x^2 - 1 = 3 \iff x^2 = 4$, donc $x = 2$ ou $x = -2$. Seul 2 appartient à D : $S = \{2\}$.

2) Validité : $2x + 1 > 0$, soit $D =]-\frac{1}{2}; +\infty[$. Pour $x \in D$: $\ln(2x + 1) = 2 \iff 2x + 1 = e^2 \iff x = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,19$, qui appartient à D : $S = \left\{ \frac{e^2 - 1}{2} \right\}$.

7. Inéquations logarithmiques

المتراجحات اللوغاريتمية

🔧 MÉTHODE

Méthode. On détermine d'abord l'ensemble de validité D , puis on utilise la croissance de $\ln$: $\ln u < \ln v \iff u < v$ (même sens) et $\ln u < k \iff u < e^k$. On termine en prenant l'intersection avec D .

⚠ ATTENTION

Attention au sens. Si $0 < q < 1$, alors $\ln q < 0$: en divisant par $\ln q$, **on change le sens** de l'inéquation. Ainsi $q^n < \varepsilon \iff n \ln q < \ln \varepsilon \iff n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}$.

🔧 EXEMPLE RÉSOLU

1) Résoudre $\ln(2x - 1) \leq \ln x$. **2)** Un capital placé à 5 % par an est multiplié par 1,05 chaque année. Au bout de combien d'années a-t-il doublé ?

Solution. 1) Validité : $2x - 1 > 0$ et $x > 0$, soit $D =]\frac{1}{2}; +\infty[$. Pour $x \in D$: $\ln(2x - 1) \leq \ln x \iff 2x - 1 \leq x \iff x \leq 1$. Donc $S =]\frac{1}{2}; 1]$.

2) Après n années, le capital est multiplié par $1,05^n$: on cherche le plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 2$. Comme $\ln$ est croissante : $1,05^n \geq 2 \iff n \ln 1,05 \geq \ln 2 \iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$ (on a divisé par $\ln 1,05 > 0$, le sens est conservé). Le plus petit entier est $n = 15$: le capital double en 15 ans.

🔧 8. Systèmes logarithmiques

النظمات اللوغاريتمية

🔧 MÉTHODE

Méthode. Pour un système en x et y où ne figurent que $\ln x$ et $\ln y$:

1. écrire les conditions de validité : $x > 0$ et $y > 0$;
2. poser $X = \ln x$ et $Y = \ln y$: on obtient un système **linéaire** en X et Y ;
3. le résoudre, puis revenir à x et y ($\ln x = X \iff x = e^X$, ou $\ln x = \ln 3 \iff x = 3$).

🔧 EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 6 \\ \ln x - \ln y = \ln \frac{3}{2} \end{cases}$ avec $x > 0$ et $y > 0$.

Solution. On pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. En additionnant : $2X = \ln 6 + \ln \frac{3}{2} = \ln 9$, donc $X = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 3$. En soustrayant : $2Y = \ln 6 - \ln \frac{3}{2} = \ln 4$, donc $Y = \ln 2$.

Ainsi $\ln x = \ln 3$ et $\ln y = \ln 2$, d'où $x = 3$ et $y = 2$. Vérification : $\ln 3 + \ln 2 = \ln 6$ et $\ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$.
 $S = \{(3, 2)\}$.

Carte : quelle méthode avec $\ln$?

خريطة: أي طريقة نختار مع اللوغاريتم؟

MÉTHODE

Je vois...	Je pense à...	Je conclus avec...
$\ln u = \ln v$, ou $\ln u + \ln v = \ln w$	validité, puis regrouper en un seul $\ln$	$u = v$, puis garder les solutions de D
$\ln u = k$	validité $u > 0$	$u = e^k$
$(\ln x)^2$ et $\ln x$ ensemble	poser $X = \ln x$	résoudre en X , puis $x = e^X$
$\ln u < \ln v$	validité, $\ln$ croissante	$u < v$ (même sens), puis $\cap D$
$q^n < \varepsilon$ ou $q^n > A$	prendre $\ln$ et isoler n	diviser par $\ln q$: sens changé si $0 < q < 1$
un système en $\ln x$ et $\ln y$	$X = \ln x$ et $Y = \ln y$	système linéaire, puis $x > 0$ et $y > 0$

Dans tous les cas : **validité d'abord**, vérification des solutions à la fin.

9. Limites de référence

نهايات مرجعية

PROPRIÉTÉS

Propriété. Les six limites à connaître :

Où va x ?	Limite
$+\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
0^+	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
$+\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
0^+	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
0	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
1	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

D'où viennent-elles ?

- La limite de $\ln x$ en $+\infty$ est admise. On en déduit celle en 0^+ : $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$, et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$.
- Les deux dernières sont des **nombre dérivés** : $\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \rightarrow \ln'(1) = 1$ quand $x \rightarrow 1$; en posant $t = 1 + x$, on obtient $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$.
- Les deux « croissances comparées » sont à connaître : le logarithme croît **moins vite** que toute puissance de x en $+\infty$, et x^n l'emporte sur $\ln x$ en 0^+ .

ATTENTION

Attention. $x \ln x$ en 0^+ est une forme indéterminée « $0 \times (-\infty)$ » : on ne l'écrit pas « $= 0$ » sans citer la limite de référence. Et ne pas confondre $\frac{\ln x}{x}$ (limite 0 en $+\infty$) avec $\frac{\ln(1+x)}{x}$ (limite 1 en 0) : on regarde toujours **où tend** x .

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer **1)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x + 1}{\ln x}$; **2)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 - 1) \ln x$.

Solution. **1)** Quand $x \rightarrow 0^+$, le numérateur $-4x + 1$ tend vers 1 et $\ln x \rightarrow -\infty$: le quotient tend vers 0.

2) $2x^2 - 1 \rightarrow -1$ et $\ln x \rightarrow -\infty$: le produit tend vers $(-1) \times (-\infty) = +\infty$.

10. Lever une indétermination

رفع حالات عدم التحديد

MÉTHODE

Méthode. Face à une forme indéterminée contenant un logarithme :

- regarder **où tend l'expression placée dans le $\ln$** (notons-la $u(x)$) ;
- choisir la limite de référence qui correspond :

Si $u(x)$ tend vers...	on utilise...
$+\infty$	$\frac{\ln u}{u} \rightarrow 0$
0^+	$u \ln u \rightarrow 0$
0	$\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$
1	$\frac{\ln u}{u-1} \rightarrow 1$

sinon, **factoriser** par le terme dominant, ou faire un **changement de variable** (par exemple $t = \frac{1}{x}$).

Composition. Si $u(x) \rightarrow b > 0$, alors $\ln u(x) \rightarrow \ln b$; si $u(x) \rightarrow +\infty$, alors $\ln u(x) \rightarrow +\infty$; si $u(x) \rightarrow 0^+$, alors $\ln u(x) \rightarrow -\infty$.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer **1)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$; **2)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Solution. **1)** C'est une forme « $+\infty - \infty$ ». Pour $x > 0$: $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$. Comme $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, la parenthèse tend vers 1 et le produit vers $+\infty$.

2) C'est une forme « $+\infty \times 0$ ». On pose $t = \frac{1}{x}$: quand $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow 0^+$, et $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 1$.

11. Étude de la fonction $\ln$

دراسة الدالة اللوغاريتمية

PROPRIÉTÉS

Tableau de variations. $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$:

x	0^+	1	e	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

La courbe de $\ln$.

- L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.
- Branche parabolique de direction l'axe des abscisses : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- La courbe est **concave** : $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.
- Tangente au point $A(1; 0)$: $y = x - 1$. Tangente au point $E(e; 1)$: $y = \frac{x}{e}$.

Conséquence. Une courbe concave est située sous ses tangentes. Donc, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{\ln x \leq x - 1}, \text{ avec égalité seulement en } x = 1.$$

EXEMPLE RÉSOLU

1) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse e . **2)** Montrer que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, puis que $\ln(1,1) \leq 0,1$.

Solution. **1)** $\ln'(e) = \frac{1}{e}$ et $\ln e = 1$, donc $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{x}{e}$.

2) La tangente en $x = 1$ est $y = \ln'(1)(x - 1) + \ln 1 = x - 1$. Comme $\ln$ est concave, sa courbe est sous cette tangente : $\ln x \leq x - 1$. Avec $x = 1,1$: $\ln(1,1) \leq 0,1$.

12. Dérivée de $\ln(u)$

مشتقة الدالة $\ln(u)$

PROPRIÉTÉS

Propriété. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $u(x) > 0$ sur I , alors $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$.
- Si $u(x) \neq 0$ sur I , alors $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$ aussi.

La fonction $\frac{u'}{u}$ s'appelle la **dérivée logarithmique** de u .

Pourquoi ? C'est la dérivée d'une composée (chapitre 2) : $(\ln \circ u)' = u' \times \ln'(u) = u' \times \frac{1}{u}$. Si $u < 0$, on a

$$|u| = -u \text{ et } (\ln(-u))' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}.$$

ATTENTION

Attention. $(\ln u)'$ n'est pas $\frac{1}{u}$: on n'oublie pas le facteur u' .

EXEMPLE RÉSOLU

1) Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \ln(4 - x^2)$ puis calculer $f'(x)$. 2) Étudier les variations de $g(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Solution. 1) $4 - x^2 > 0 \iff x \in]-2; 2[$, donc $D_f =]-2; 2[$ et $f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$.

2) $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , donc g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, du signe de x : g est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

13. Primitives de u'/u **الدوال الأصلية للدالة u'/u** **PROPRIÉTÉS**

Propriété. Soit u une fonction dérivable qui **ne s'annule pas** sur un intervalle I . Les primitives de $\frac{u'}{u}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Si $u > 0$ sur I , on peut écrire simplement $\ln u(x)$.

La case vide est remplie. Avec $u(x) = x$: une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$ sur $]0; +\infty[$, et $\ln|x| = \ln(-x)$ sur $]-\infty; 0[$.

Méthode.

1. Repérer au numérateur la dérivée du dénominateur. Sinon, faire apparaître un **facteur constant** :

$$\frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a} \times \frac{a}{ax+b}, \text{ de primitive } \frac{1}{a} \ln|ax+b|.$$

2. Choisir $\ln|u|$, ou $\ln u$ si $u > 0$ sur I (**attention** : si $u < 0$ sur I , on écrit $\ln(-u)$).

3. **Vérifier en dérivant.**

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer une primitive de **a)** $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$; **b)** $f(x) = \frac{3}{2x-6}$ sur $]-\infty; 3[$; **c)** $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, celle qui s'annule en 0.

Solution. **a)** Le numérateur $2x$ est la dérivée de $x^2 + 1$, qui est > 0 : $F(x) = \ln(x^2 + 1)$.

b) $\frac{3}{2x-6} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{2x-6}$. Sur $]-\infty; 3[$, $2x - 6 < 0$, donc $|2x - 6| = 6 - 2x$: $F(x) = \frac{3}{2} \ln(6 - 2x)$.

Vérification : $F'(x) = \frac{3}{2} \times \frac{-2}{6-2x} = \frac{3}{2x-6}$.

c) $\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x+1}$ et $2x + 1 > 0$: les primitives sont $\frac{1}{2} \ln(2x + 1) + c$. La condition $F(0) = 0$ donne $c = 0$: $F(x) = \frac{1}{2} \ln(2x + 1)$.

14. Les fonctions $x \mapsto \ln(u(x))$ **الدوال من الشكل $\ln(u(x))$** **MÉTHODE**

Méthode. Pour étudier $f(x) = \ln(u(x))$:

1. **Ensemble de définition** : $u(x) > 0$ (strictement : $\ln 0$ n'existe pas).
2. **Limites aux bornes** : on regarde où tend $u(x)$ ($+\infty$ donne $+\infty$; 0^+ donne $-\infty$; $b > 0$ donne $\ln b$).
3. **Variations** : $f' = \frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, donc f' a le signe de u' : f varie **dans le même sens que u** .
4. **Signe** : $\ln u(x) \geq 0 \iff u(x) \geq 1$ et $\ln u(x) < 0 \iff 0 < u(x) < 1$.

EXEMPLE RÉSOLU

Étudier $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

Solution. Définition : $x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$ ou $x > 1 : D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Limites : en $\pm\infty$, $x^2 - 1 \rightarrow +\infty$ donc $f \rightarrow +\infty$; en 1^+ et en -1^- , $x^2 - 1 \rightarrow 0^+$ donc $f \rightarrow -\infty$ (deux asymptotes verticales).

Variations : $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ a le signe de $2x$ sur D_f : f est décroissante sur $]-\infty; -1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

Signe : $f(x) \geq 0 \iff x^2 - 1 \geq 1 \iff x^2 \geq 2 \iff |x| \geq \sqrt{2}$.

15. Une étude complète, type examen

دراسة كاملة من نمط الامتحان

MÉTHODE

Plan d'étude.

1. Ensemble de définition, **limites aux bornes**, asymptotes et branches infinies.
2. **Dérivée** f' . Si son signe n'est pas évident, on étudie une **fonction auxiliaire** g (c'est elle que l'énoncé demande souvent d'étudier en premier).
3. **Tableau de variations**.
4. **Position** de la courbe par rapport à une asymptote ou à une droite : signe de $f(x) - (ax + b)$.
5. Concavité et points d'inflexion avec f'' (chapitre 2).
6. Équation $f(x) = k$: fonction continue et strictement monotone, donc **solution unique** (chapitre 1).
7. Tracé.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1) Limites. En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $\frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$ et $f(x) \rightarrow -\infty$: l'axe des ordonnées est asymptote. En $+\infty$: $f(x) - (x - 1) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$: la droite (D) $y = x - 1$ est asymptote oblique.

2) Position. $f(x) - (x - 1) = \frac{\ln x}{x}$ a le signe de $\ln x$: la courbe est au-dessus de (D) pour $x > 1$, en dessous pour $x < 1$, et la coupe en $x = 1$.

3) Dérivée. $f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ avec $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$. Alors $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$: g décroît sur $]0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ puis croît, et son minimum vaut $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2} > 0$. Donc $g > 0$, donc $f' > 0$:

f est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$.

4) Équation $f(x) = 0$. f est continue et strictement croissante, et $f(1) = 1 - 1 + 0 = 0$: la seule solution est $x = 1$.

16. Logarithme de base a

اللوغاريتم ذو الأساس a

DÉFINITIONS

Définition. Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. Le **logarithme de base a** est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \text{ Pour } a = e, \text{ on retrouve } \ln.$$

Propriétés. On a $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a (a^r) = r$ pour r rationnel, et les **mêmes règles que $\ln$** :
 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a (x^r) = r \log_a x$.

Sens de variation. $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$. Si $a > 1$ ($\ln a > 0$), $\log_a$ est strictement croissante ; si $0 < a < 1$ ($\ln a < 0$), elle est strictement **décroissante**, et le sens d'une inéquation change.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Calculer $\log_2 8 + \log_5 \frac{1}{25}$. 2) Résoudre $\log_{1/2}(2x+1) \geq \log_{1/2}(x+4)$.

Solution. 1) $8 = 2^3$ et $\frac{1}{25} = 5^{-2}$: $\log_2 8 + \log_5 \frac{1}{25} = 3 + (-2) = 1$.

2) Validité : $2x+1 > 0$ et $x+4 > 0$, soit $D =]-\frac{1}{2}; +\infty[$. Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\log_{1/2}$ est décroissante : on change le sens, $2x+1 \leq x+4 \iff x \leq 3$. Donc $S =]-\frac{1}{2}; 3]$.

17. Logarithme décimal et pH

اللوغاريتم العشري و pH

DÉFINITIONS

Définition. Le **logarithme décimal** est le logarithme de base 10 : $\log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. On a $\log 10 = 1$ et $\log(10^r) = r$ pour r rationnel.

Équation $10^x = a$. Pour $a > 0$: $10^x = a \iff x = \log a$, et, comme $10 > 1$, $10^x \leq a \iff x \leq \log a$.

Application en chimie. Le pH d'une solution est $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$ (concentration en mol/L). Quand la concentration est multipliée par 10, le pH diminue de 1. À 25 °C, la solution est acide si $\text{pH} < 7$, neutre si $\text{pH} = 7$, basique si $\text{pH} > 7$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Résoudre $10^x = 5$. 2) Dans le sang humain, $[\text{H}_3\text{O}^+]$ est comprise entre $10^{-7,4}$ et $10^{-7,3}$ mol/L. Montrer que le sang est basique.

Solution. 1) $10^x = 5 \iff x = \log 5 \approx 0,699$.

2) Pour $c = [\text{H}_3\text{O}^+]$ avec $10^{-7,4} \leq c \leq 10^{-7,3}$, la croissance de $\log$ donne $-7,4 \leq \log c \leq -7,3$, donc $7,3 \leq \text{pH} \leq 7,4$. Le pH est supérieur à 7 : le sang est basique.

Carte : étudier une fonction avec $\ln$

خريطة: كيف ندرس دالة تحتوي على $\ln$ ؟

MÉTHODE

Je vois...	Je pense à...	Je conclus avec...
$\ln x$ ou $\frac{\ln x}{x^n}$, $x^n \ln x$	où va x ?	limite de référence (citée)
$x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)$ en $+\infty$	$t = \frac{a}{x} \rightarrow 0$	$\frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 1$
$x - \ln x$ en $+\infty$ (indétermination)	factoriser par x	$\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$
$\ln(u(x))$ à étudier	$u(x) > 0$ d'abord	$f' = \frac{u'}{u}$, signe de u'
signe de $\ln u(x)$	comparer $u(x)$ à 1	$\ln u \geq 0 \iff u \geq 1$
une fraction $\frac{u'}{u}$ à primitiver	le numérateur est-il u' ?	$\ln u $ (facteur constant si besoin), puis vérifier
$\log_a$ avec $a < 1$	$\ln a < 0$	fonction décroissante : le sens change
$10^x = a$, pH	log de chaque côté	$x = \log a$

Dans tous les cas : **domaine d'abord, vérification** à la fin.

Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ « $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$. »

✓ Il n'y a aucune règle pour une somme. La règle est $\ln(ab) = \ln a + \ln b$: le logarithme transforme les **produits** en sommes.

✗ Résoudre $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 3$ sans chercher l'ensemble de validité, et garder $x = -2$.

✓ Validité : $x > 1$. L'équation donne $x^2 = 4$, mais seul $x = 2$ convient : $S = \{2\}$.

✗ $0,5^n < 0,001 \iff n < \frac{\ln 0,001}{\ln 0,5}$.

✓ $\ln 0,5 < 0$: en divisant, **on change le sens**. $n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,5} \approx 9,97$, donc $n \geq 10$.

✗ « $(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}$. »

✓ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$: $(\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$.

✗ « Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$ est $\ln x$. »

✓ $\ln x$ n'existe pas pour $x < 0$. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln |u|$: ici $\ln |x| = \ln(-x)$.

MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.