



Chapitre : Les fonctions logarithmes

الدوال اللوغاريتمية



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

Le logarithme népérien

DÉFINITIONS

- $\ln$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 : $\ln 1 = 0$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- Le nombre $e \approx 2,718$ vérifie $\ln e = 1$; pour $x > 0$ et r rationnel : $\ln x = r \iff x = e^r$ et $\ln(e^r) = r$.
- $\ln$ est strictement croissante : pour $a > 0, b > 0$, $\ln a = \ln b \iff a = b$ et $\ln a < \ln b \iff a < b$.
- $\ln x < 0$ sur $]0; 1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉS

- Pour $a > 0, b > 0$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- Pour $a > 0$ et r rationnel : $\ln(a^r) = r \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.
- Le logarithme transforme les **produits** en sommes : il n'existe aucune règle pour $\ln(a + b)$.

★ Limites et courbe de $\ln$

★ À RETENIR

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.
- Asymptote verticale $x = 0$; branche parabolique de direction (Ox) ; $\ln$ est concave ; tangente en 1 : $y = x - 1$, d'où $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

★ Dérivée de $\ln(u)$ et primitives de u'/u

★ À RETENIR

- Si $u > 0$ sur I : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$. Si $u \neq 0$ sur I : $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$.
- Si u ne s'annule pas sur I : les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont $\ln |u| + c$.
- Cas utiles : $\frac{1}{x} \rightarrow \ln |x|$; $\frac{1}{ax+b} \rightarrow \frac{1}{a} \ln |ax+b|$.

🔧 Méthodes

🔧 MÉTHODE

- **Équation ou inéquation avec $\ln$** : validité d'abord (tout ce qui est dans un $\ln$ est > 0), puis $\ln u = \ln v \iff u = v$, $\ln u = k \iff u = e^k$, $\ln u < \ln v \iff u < v$; garder les solutions de l'ensemble de validité.
- **Inéquation $q^n < \varepsilon$** : diviser par $\ln q$, en changeant le sens si $0 < q < 1$.
- **Étudier $\ln(u(x))$** : définie si $u(x) > 0$; varie dans le même sens que u ; $\ln u(x) \geq 0 \iff u(x) \geq 1$; pour les limites, regarder où tend $u(x)$.

★ Logarithme de base a et logarithme décimal

★ À RETENIR

- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$) : mêmes règles que $\ln$; croissante si $a > 1$, **décroissante** si $0 < a < 1$.
- $\log = \log_{10}$: $10^x = a \iff x = \log a$; $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$.

★ Erreurs à éviter

★ À RETENIR

- $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$: la règle est $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- Ne jamais oublier l'ensemble de validité : une solution trouvée hors de cet ensemble est rejetée.
- Dans $q^n < \varepsilon$ avec $0 < q < 1$, diviser par $\ln q < 0$ change le sens de l'inégalité.
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et non $\frac{1}{u}$; sur un intervalle où $x < 0$, une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln |x|$, pas $\ln x$.

✗ Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ « $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$. »

✓ Il n'y a aucune règle pour une somme. La règle est $\ln(ab) = \ln a + \ln b$: le logarithme transforme les **produits** en sommes.

✗ Résoudre $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 3$ sans chercher l'ensemble de validité, et garder $x = -2$.

✓ Validité : $x > 1$. L'équation donne $x^2 = 4$, mais seul $x = 2$ convient : $S = \{2\}$.

✗ $0,5^n < 0,001 \iff n < \frac{\ln 0,001}{\ln 0,5}$.

✓ $\ln 0,5 < 0$: en divisant, **on change le sens**. $n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,5} \approx 9,97$, donc $n \geq 10$.

✗ « $(\ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{x^2 + 1}$. »

✓ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$: $(\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

✗ « Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$ est $\ln x$. »

✓ $\ln x$ n'existe pas pour $x < 0$. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln |u|$: ici $\ln |x| = \ln(-x)$.

★ Tableau récapitulatif des formules

Formule	Conditions d'usage
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$	Sur $]0; +\infty[$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$	$a > 0, b > 0$
$\ln(a^r) = r \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$	$a > 0, r$ rationnel
$\ln x = r \iff x = e^r$	$x > 0, r$ rationnel
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	Limites aux bornes de $]0; +\infty[$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	Nombre dérivé de $\ln$ en 1
$\ln x \leq x - 1$	$x > 0$ (tangente en 1)
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$u > 0$ sur I ; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ si $u \neq 0$
$\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u $	u ne s'annule pas sur I
$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$; $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$	$a > 0, a \neq 1$; décroissante si $0 < a < 1$

MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.