



Chapitre : Les fonctions exponentielles

الدوال الأسية



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

💡 SITUATION DÉCLENCHANTE وضعية انطلاق

Au chapitre 5, on a résolu des équations comme $\ln x = 2$: la solution est $x = e^2$. Mais que faire de $\ln x = 0,7$, ou de $\ln x = -3,2$?

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et elle prend **toutes** les valeurs réelles (ses limites sont $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$). Donc, pour **chaque** réel k , l'équation $\ln x = k$ a une **unique** solution. Associer à k cette solution, c'est définir une nouvelle fonction : la **fonction exponentielle**, qui « défait » $\ln$.

Grâce à elle, on saura résoudre $\ln x = 0,7$ (on trouvera $x \approx 2,01$), et surtout on pourra décrire tous les phénomènes qui varient « proportionnellement à eux-mêmes » : la désintégration d'une substance radioactive, la concentration d'un médicament dans le sang, la croissance d'une population...

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE أهداف الفصل

- Définir la fonction exponentielle comme la réciproque de $\ln$, connaître la notation e^x et ses propriétés algébriques.
- Résoudre des équations, des inéquations et des systèmes comportant des exponentielles.
- Calculer les limites de référence de l'exponentielle et lever des indéterminations.
- Dériver e^u et déterminer les primitives de $u'e^u$.
- Étudier et représenter des fonctions comportant e^x et $\ln x$.
- Utiliser l'exponentielle de base a pour modéliser (décroissance radioactive, demi-vie).

1. La fonction exponentielle

الدالة الأسية النيبيرية

DÉFINITIONS

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et $\ln$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une **fonction réciproque**, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$.

Définition. Cette fonction réciproque s'appelle la **fonction exponentielle népérienne**, notée $\exp$:

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0; +\infty[$ et, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$: $y = \exp(x) \iff x = \ln y$.

Conséquences.

- Pour tout réel x : $\exp(x) > 0$.
- Pour tout réel x : $\ln(\exp(x)) = x$; pour tout $y > 0$: $\exp(\ln y) = y$.
- $\exp(0) = 1$ (car $\ln 1 = 0$) et $\exp(1) = e$ (car $\ln e = 1$).
- Dans un repère orthonormé, les courbes de $\exp$ et de $\ln$ sont **symétriques par rapport à la droite** $y = x$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Calculer $\exp(\ln 5)$ et $\ln(\exp(-2))$. **2)** Pour quel réel x a-t-on $\exp(x) = 3$?

Solution. **1)** $\exp(\ln 5) = 5$ (car $5 > 0$) et $\ln(\exp(-2)) = -2$.

2) $\exp(x) = 3 \iff x = \ln 3$: la solution est $x = \ln 3 \approx 1,10$.

2. Le nombre e et la notation exponentielle

العدد e والكتابة الأسية

DÉFINITIONS

Soit r un **rationnel**. D'après le chapitre 5, $\ln(e^r) = r \ln e = r$. Or, par définition, $\ln(\exp(r)) = r$ aussi. Comme $\ln$ prend chaque valeur une seule fois : $\exp(r) = e^r$.

On **prolonge** cette écriture à tous les réels : pour tout réel x , on note $\exp(x) = e^x$ (on lit « e exposant x » ou « exponentielle de x »). Ainsi $e^{\sqrt{2}}$ ou $e^{-1,3}$ ont maintenant un sens.

Ce qu'il faut savoir :

- $e^x > 0$ pour tout réel x ; $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,718$.
- $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x , et $e^{\ln y} = y$ pour tout $y > 0$.
- Pour $y > 0$: $e^x = y \iff x = \ln y$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Calculer $e^{\ln 7}$, $\ln(e^{-3})$ et e^0 . **2)** Donner une valeur approchée de e^{-2} .

Solution. **1)** $e^{\ln 7} = 7$; $\ln(e^{-3}) = -3$; $e^0 = 1$.

2) À la calculatrice (touche e^x) : $e^{-2} \approx 0,135$. C'est un nombre **strictement positif**, même si l'exposant est négatif.

3. L'exponentielle est strictement croissante

الدالة الأسية تزايدية قطعاً

PROPRIÉTÉS

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante : sa réciproque $x \mapsto e^x$ l'est aussi (chapitre 1).
Donc, pour tous réels a et b :

- $e^a = e^b \iff a = b$;
- $e^a < e^b \iff a < b$ (l'ordre est conservé).

Comme $e^0 = 1$, on en déduit le signe de $e^x - 1$:

$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$e^x < 1$	$e^x = 1$	$e^x > 1$

EXEMPLE RÉSOLU

1) Comparer $e^{\sqrt{2}}$ et $e^{1,5}$. 2) Étudier le signe de $e^{-x} - 1$ selon les valeurs de x .

Solution. 1) $\sqrt{2} < 1,5$ (car $2 < 2,25$) et $\exp$ est strictement croissante, donc $e^{\sqrt{2}} < e^{1,5}$.

2) $e^{-x} - 1 > 0 \iff e^{-x} > e^0 \iff -x > 0 \iff x < 0$. Donc $e^{-x} - 1$ est positif pour $x < 0$, nul pour $x = 0$ et négatif pour $x > 0$.

4. Propriétés algébriques

الخصائص الجبرية

PROPRIÉTÉS

Propriété. Pour tous réels a et b et tout rationnel r :

1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$: l'exponentielle **transforme les sommes en produits** ;
2. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;
3. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$;
4. $(e^a)^r = e^{ra}$; en particulier $(e^a)^2 = e^{2a}$ et $\sqrt{e^a} = e^{a/2}$.

Preuve de la propriété 1. Les nombres e^a et e^b sont strictement positifs, donc $\ln(e^a \times e^b) = \ln e^a + \ln e^b = a + b = \ln(e^{a+b})$. Comme $\ln$ prend chaque valeur une seule fois, $e^a \times e^b = e^{a+b}$.

Les autres s'en déduisent : $e^a \times e^{-a} = e^0 = 1$ donne la 2 ; la 3 s'écrit $e^{a-b} = e^a \times e^{-b}$; et, pour la 4, $\ln((e^a)^r) = r \ln e^a = ra = \ln(e^{ra})$.

EXEMPLE RÉSOLU

Simplifier, pour x réel : 1) $A = e^{2x+1} \times e^{3-x}$; 2) $B = \frac{(e^x)^3}{e^{2x-1}}$; 3) $C = \sqrt{e^{6x}}$.

Solution. 1) $A = e^{(2x+1)+(3-x)} = e^{x+4}$.

2) $B = \frac{e^{3x}}{e^{2x-1}} = e^{3x-(2x-1)} = e^{x+1}$.

3) $C = (e^{6x})^{1/2} = e^{3x}$.



5. Simplifier avec ln et exp, et éviter les pièges

التبسيط وتجنب الأخطاء

MÉTHODE

Avec un logarithme dans l'exposant. Pour $a > 0$ et k réel : $e^{k \ln a} = e^{\ln(a^k)} = a^k$. Par exemple $e^{2 \ln 5} = 25$ et $e^{-\ln 3} = \frac{1}{3}$.

Quatre pièges à éviter.

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$, mais il n'y a **aucune règle** pour $e^a + e^b$.
- $(e^x)^2 = e^{2x}$ n'est **pas** e^{x^2} : pour $x = 3$, on obtient e^6 d'un côté et e^9 de l'autre.
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0$: ce n'est **pas** $-e^x$.
- $e^0 = 1$ (et non 0) ; $e^1 = e$ (et non 1).

EXEMPLE RÉSOLU

1) Simplifier $A = e^{2 \ln 5}$, $B = e^{\ln 6 - \ln 2}$ et $C = \ln(e^{-3}) + e^{\ln 4}$. **2)** Montrer que, pour tout réel x : $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$. **3)** Montrer que $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

Solution. **1)** $A = e^{\ln(5^2)} = 25$; $B = e^{\ln \frac{6}{2}} = e^{\ln 3} = 3$; $C = -3 + 4 = 1$.

2) On divise le numérateur et le dénominateur par e^x : $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

3) Comme $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$, on a $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$ et $(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$. La différence vaut $2 - (-2) = 4$.



6. Équations exponentielles

المعادلات الأسية

MÉTHODE

Méthode.

1. Repérer les conditions éventuelles : e^u existe toujours, mais un ln ou un dénominateur imposent des conditions.
2. Se ramener à $e^u = e^v$ ou à $e^u = k$.
3. $e^u = e^v \iff u = v$. Et $e^u = k$: si $k > 0$, alors $u = \ln k$; si $k \leq 0$, il n'y a **aucune solution** (car $e^u > 0$).
4. Si l'équation est du second degré en e^x , poser $X = e^x$ **avec** $X > 0$, résoudre en X , **ne garder que les** $X > 0$, puis revenir à $x = \ln X$.

Équations avec ln. Pour $u > 0$ et pour **tout réel** k : $\ln u = k \iff u = e^k$ (le chapitre 5 ne le donnait que pour k rationnel).

EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre dans $\mathbb{R}$: **1)** $e^{2x-1} = e^{x+3}$; **2)** $e^x = 5$, puis $e^x = -2$; **3)** $e^{2x} + e^x - 2 = 0$; **4)** $\ln x = 0,7$ (la question de départ).

Solution. **1)** $e^{2x-1} = e^{x+3} \iff 2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$. $S = \{4\}$.

2) $e^x = 5 \iff x = \ln 5$; $S = \{\ln 5\}$. Pour $e^x = -2$: $e^x > 0$ pour tout x , donc $S = \emptyset$ (écrire $x = \ln(-2)$ n'a aucun sens).

3) On pose $X = e^x$, avec $X > 0$: $X^2 + X - 2 = 0$, soit $(X - 1)(X + 2) = 0$, donc $X = 1$ ou $X = -2$. Seule $X = 1$ est positive, donc $e^x = 1$, soit $x = 0$. $S = \{0\}$.

4) $\ln x = 0,7 \iff x = e^{0,7} \approx 2,01$, et $2,01 > 0$: $S = \{e^{0,7}\}$.

7. Inéquations exponentielles

المتراجحات الأسية

MÉTHODE

Méthode. On utilise la croissance de $\exp$: $e^u < e^v \iff u < v$ (même sens). Pour comparer à un nombre k :

- si $k > 0$: $e^u < k \iff u < \ln k$ et $e^u > k \iff u > \ln k$;
- si $k \leq 0$: $e^u < k$ n'a aucune solution et $e^u > k$ est vraie pour tout u (car $e^u > 0$).

Pour une inéquation du second degré en e^x , on pose $X = e^x$ ($X > 0$), on résout en X , **puis on revient à x** : s'arrêter à l'encadrement de X est une erreur classique.

ATTENTION

Attention au sens. Si on multiplie ou divise par un nombre **négatif**, le sens de l'inégalité change.

EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre dans $\mathbb{R}$: **1)** $e^{3x-2} > e^{x+4}$; **2)** $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$. **3)** La concentration d'un médicament dans le sang, en mg/L, est $C(t) = 10e^{-0,2t}$ (t en heures). À partir de quand a-t-on $C(t) \leq 1$?

Solution. **1)** $e^{3x-2} > e^{x+4} \iff 3x - 2 > x + 4 \iff x > 3$. $S =]3; +\infty[$.

2) Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - 3X + 2 < 0 \iff (X - 1)(X - 2) < 0 \iff 1 < X < 2$. On revient à x : $1 < e^x < 2 \iff 0 < x < \ln 2$. $S =]0; \ln 2[$.

3) $10e^{-0,2t} \leq 1 \iff e^{-0,2t} \leq 0,1 \iff -0,2t \leq \ln 0,1 = -\ln 10$. En divisant par $-0,2 < 0$, **le sens**

change : $t \geq \frac{\ln 10}{0,2} = 5 \ln 10 \approx 11,5$. La concentration est inférieure à 1 mg/L à partir de 11,5 heures environ.

8. Systèmes exponentiels

النظمت الأسية

MÉTHODE

Méthode. Quand les inconnues x et y n'apparaissent que dans e^x et e^y :

1. poser $X = e^x$ et $Y = e^y$, avec $X > 0$ et $Y > 0$;
2. résoudre le système en X et Y ;
3. vérifier que $X > 0$ et $Y > 0$, puis revenir à $x = \ln X$ et $y = \ln Y$.

Si le système contient aussi $x + y$, on utilise $e^{x+y} = e^x \times e^y = XY$.

EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: **1)** $\begin{cases} e^x + 2e^y = 7 \\ 4e^x - e^y = 1 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} x + y = \ln 6 \\ e^x - e^y = 1 \end{cases}$.

Solution. **1)** Avec $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$: $\begin{cases} X + 2Y = 7 \\ 4X - Y = 1 \end{cases}$. La seconde équation donne $Y = 4X - 1$,

d'où $X + 2(4X - 1) = 7$, soit $9X = 9$: $X = 1$ et $Y = 3$. Ils sont positifs : $x = \ln 1 = 0$ et $y = \ln 3$. $S = \{(0; \ln 3)\}$.

2) De $x + y = \ln 6$ on tire $e^x \times e^y = e^{x+y} = 6$, soit $XY = 6$. Avec $X - Y = 1$: $X = Y + 1$, donc $Y^2 + Y - 6 = 0$, soit $Y = 2$ ou $Y = -3$. Seule $Y = 2$ convient ($Y > 0$), d'où $X = 3$. Donc $x = \ln 3$ et $y = \ln 2$.

Vérification : $\ln 3 + \ln 2 = \ln 6$ et $3 - 2 = 1$. $S = \{(\ln 3; \ln 2)\}$.

Carte : quelle méthode avec exp ?

خريطة: أي طريقة نختار مع الدالة الأسية؟

MÉTHODE

Je vois...	Je pense à...	Je conclus avec...
$e^u = e^v$	l'exponentielle prend chaque valeur une seule fois	$u = v$
$e^u = k$	signe de k	$u = \ln k$ si $k > 0$; aucune solution si $k \leq 0$
e^{2x} et e^x ensemble	poser $X = e^x$, avec $X > 0$	résoudre en X , rejeter $X \leq 0$, puis $x = \ln X$
$e^u < e^v$ ou $e^u < k$ ($k > 0$)	exp est croissante	$u < v$ (même sens) ou $u < \ln k$; changer le sens si on divise par un négatif
$\ln u = k$	validité $u > 0$	$u = e^k$
un système en e^x et e^y	$X = e^x$ et $Y = e^y$; $e^{x+y} = XY$	système en X, Y , puis $X > 0, Y > 0$

Dans tous les cas : e^u **est toujours strictement positif**, et on revient à x à la fin.

9. Limites de référence

نهايات مرجعية

PROPRIÉTÉS

Propriété. Les limites à connaître (n entier naturel non nul) :

Où va x ?	Limite
$+\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$+\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
0	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

D'où viennent-elles ?

- Les deux premières traduisent que exp est la réciproque de ln : ln va de 0^+ (limite $-\infty$) à $+\infty$ (limite $+\infty$), donc exp va de 0 en $-\infty$ à $+\infty$ en $+\infty$.
- Pour $n = 1$: avec $X = e^x$, on a $\frac{e^x}{x} = \frac{X}{\ln X}$, et $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0^+$ quand $X \rightarrow +\infty$ (chapitre 5) : le quotient tend vers $+\infty$.
- Avec $t = e^x - 1$, on a $x = \ln(1 + t)$ et $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\ln(1 + t)} \rightarrow 1$, car $\frac{\ln(1 + t)}{t} \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$ (chapitre 5).
- En résumé : **l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x** , en $+\infty$ comme en $-\infty$.

Composition. Si $u(x) \rightarrow +\infty$, alors $e^{u(x)} \rightarrow +\infty$; si $u(x) \rightarrow -\infty$, alors $e^{u(x)} \rightarrow 0$; si $u(x) \rightarrow b$ réel, alors $e^{u(x)} \rightarrow e^b$.

ATTENTION

Attention. xe^x en $-\infty$ est une forme indéterminée « $(-\infty) \times 0$ » : on cite la limite de référence, on n'écrit pas « $-\infty \times 0 = 0$ ». Et on regarde toujours **où tend** x : $\frac{e^x}{x}$ (en $+\infty$) et $\frac{e^x - 1}{x}$ (en 0) sont deux limites différentes.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer **1)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$; **2)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$; **3)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x$.

Solution. **1)** Limite de référence avec $n = 3 : +\infty$. **2)** Limite de référence avec $n = 2 : 0$.

3) $-x \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow 0$. Et $(x+1)e^x = xe^x + e^x$: les deux termes tendent vers 0, donc la limite est 0.

10. Lever une indétermination

رفع حالات عدم التحديد

MÉTHODE

Méthode. Face à une forme indéterminée contenant une exponentielle :

1. regarder **où tend l'exposant** $u(x)$;
2. choisir la limite de référence qui correspond (tableau ci-dessous) ;
3. sinon, **factoriser par le terme dominant** (e^x , e^{2x} , ou x).

Si $u(x)$ tend vers...	on utilise...
$+\infty$	$\frac{e^u}{u} \rightarrow +\infty$
$-\infty$	$ue^u \rightarrow 0$
0	$\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1$

Avec un logarithme. Il n'y a pas de règle pour $\ln(e^x + 1)$: on factorise par e^x , $\ln(e^x + 1) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer **1)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$; **2)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$; **3)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - x]$.

Solution. **1)** Forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise par x : $e^x - x = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$. Comme $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$, la parenthèse tend vers $+\infty$, et le produit aussi.

2) Forme « $\frac{0}{0}$ ». On fait apparaître $u = 2x \rightarrow 0$: $\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} \rightarrow 2 \times 1 = 2$.

3) D'après la factorisation ci-dessus : $\ln(e^x + 1) - x = \ln(1 + e^{-x})$. Or $e^{-x} \rightarrow 0$, donc la limite est $\ln 1 = 0$.

11. Dérivée de exp et de exp(u)

مشتقة الدالة الأسية و exp(u)

PROPRIÉTÉS

Théorème. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$.

Pourquoi ? C'est la réciproque de $\ln$, dont la dérivée $\frac{1}{y}$ ne s'annule pas. Par la dérivée d'une fonction réciproque (chapitre 2) : $(e^x)' = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{1/e^x} = e^x$.

Propriété. Si u est dérivable sur un intervalle I , alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$. Par exemple $(e^{3x})' = 3e^{3x}$ et $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

Tangente en 0 et inégalité. La tangente à la courbe de exp au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$. De plus, pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$. En effet, $g(x) = e^x - x - 1$ a pour dérivée $g'(x) = e^x - 1$, du signe de x : g a un minimum en 0, égal à $g(0) = 0$, donc $g \geq 0$.

ATTENTION

$(e^u)'$ n'est ni e^u , ni ue^{u-1} : on n'oublie pas le facteur u' .

EXEMPLE RÉSOLU

Calculer la dérivée de **1)** $f(x) = xe^x$; **2)** $g(x) = e^{x^2-3x}$; **3)** $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Solution. **1)** Produit : $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x$.

2) Avec $u(x) = x^2 - 3x$: $g'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x}$.

3) Quotient : $h'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

12. Primitives de $u' \times \exp(u)$

الدوال الأصلية للدالة u'exp(u)

PROPRIÉTÉS

Propriété. Si u est dérivable sur un intervalle I , les primitives de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Cas fréquent : pour $a \neq 0$, une primitive de e^{ax+b} est $\frac{1}{a}e^{ax+b}$.

Méthode. Repérer l'exposant u , calculer u' , puis **ajuster le coefficient** pour faire apparaître exactement $u'e^u$. On vérifie toujours en dérivant.

ATTENTION

Une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$, et non e^{2x} . Et $\frac{e^x}{e^x + 1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ (chapitre 5) : ses primitives sont $\ln(e^x + 1) + c$.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer une primitive de **1)** $f(x) = e^{2x}$; **2)** $g(x) = 3e^{-x+1}$; **3)** $h(x) = xe^{x^2}$.

Solution. **1)** $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$: $e^{2x} = \frac{1}{2} \times 2e^{2x}$, donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

2) $u(x) = -x + 1$, $u'(x) = -1$: $3e^{-x+1} = -3 \times (-e^{-x+1})$, donc $G(x) = -3e^{-x+1}$.

3) $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$: $xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$, donc $H(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$.

Vérification de 3) : $H'(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2} = xe^{x^2}$.

13. Étude de la fonction exponentielle

دراسة الدالة الأسية

PROPRIÉTÉS

Tableau de variations. $(e^x)' = e^x > 0$: la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de 0 (en $-\infty$) à $+\infty$ (en $+\infty$). Valeurs utiles : $e^{-1} \approx 0,37$; $e^0 = 1$; $e^1 \approx 2,72$; $e^2 \approx 7,39$.

Branches infinies.

- En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc la droite $y = 0$ (l'axe des abscisses) est **asymptote** à la courbe.
- En $+\infty$: $e^x \rightarrow +\infty$ et $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$, donc la courbe admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.

ATTENTION

L'asymptote $y = 0$ est en $-\infty$, pas en $+\infty$.

PROPRIÉTÉS

Concavité et tangentes. $(e^x)'' = e^x > 0$: la courbe est **convexe**, au-dessus de ses tangentes, dont $y = x + 1$ (en 0) et $y = ex$ (en 1). Enfin, la courbe de $\exp$ est la symétrique de celle de $\ln$ par rapport à la droite $y = x$.

EXEMPLE RÉSOLU

Étudier la position de la courbe de $\exp$ par rapport à la droite $y = x$.

Solution. Pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$ (partie 11), donc $e^x - x \geq 1 > 0$. La courbe de $\exp$ est **strictement au-dessus** de la droite $y = x$. Par symétrie, celle de $\ln$ est strictement en dessous.

14. Les fonctions $x \mapsto \exp(u(x))$

الدوال من الشكل $\exp(u(x))$

MÉTHODE

À retenir.

- Ensemble de définition** : $e^{u(x)}$ existe dès que $u(x)$ existe (aucune condition supplémentaire).
- Variations** : $(e^u)' = u'e^u$ et $e^u > 0$, donc e^u **a le même sens de variation que u** .
- Limites** : par composition (partie 9).
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ est strictement positive et **décroissante** (ce n'est pas $-e^x$).

EXEMPLE RÉSOLU

Étudier $f(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire ($f(-x) = f(x)$).

Variations : $u(x) = -x^2$ croît sur $] -\infty ; 0]$ et décroît sur $[0 ; +\infty [$; f a le même sens de variation, avec un maximum $f(0) = e^0 = 1$. On le retrouve avec $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, du signe de $-x$.

Limites : $-x^2 \rightarrow -\infty$ en $\pm\infty$, donc $f(x) \rightarrow 0$: l'axe des abscisses est asymptote des deux côtés. La courbe a une forme de **cloche**.

15. Une étude complète, type examen

دراسة كاملة من نمط الامتحان

MÉTHODE

Plan d'étude.

1. Ensemble de définition, **limites aux bornes**, asymptotes et branches infinies.
2. **Dérivée** f' . Si son signe n'est pas évident, on étudie une **fonction auxiliaire** g .
3. **Tableau de variations**.
4. **Position** de la courbe par rapport à une asymptote $y = ax + b$: le signe de $f(x) - (ax + b)$ est souvent celui d'un facteur, puisque $e^x > 0$.
5. Concavité et points d'inflexion avec f'' (chapitre 2).
6. Équation $f(x) = 0$: fonction continue et strictement monotone, donc **solution unique** α (chapitre 1).

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = x + (x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1) Limites. En $-\infty$: $(x - 1)e^x = xe^x - e^x \rightarrow 0$, donc $f(x) - x \rightarrow 0$: la droite $(D) y = x$ est **asymptote oblique** en $-\infty$. En $+\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = 1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) Position. $f(x) - x = (x - 1)e^x$ a le signe de $x - 1$: la courbe est en dessous de (D) pour $x < 1$, au-dessus pour $x > 1$, et la coupe au point $(1; 1)$.

3) Dérivée. $f'(x) = 1 + e^x + (x - 1)e^x = 1 + xe^x$. Posons $g(x) = 1 + xe^x$: $g'(x) = (x + 1)e^x$, du signe de $x + 1$. Le minimum de g est $g(-1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$. Donc $f'(x) > 0$: **f est strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

4) Équation $f(x) = 0$. f est continue et strictement croissante, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$: l'équation a une **unique solution** $\alpha \in]0; 1[$ ($\alpha \approx 0,66$). Elle vérifie $\alpha + (\alpha - 1)e^\alpha = 0$, soit $e^\alpha = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$.

16. Fonctions mêlant exp et ln

دوال تجمع بين الأسية واللوغاريتم

MÉTHODE

Ensemble de définition. Les conditions viennent du $\ln$ et des dénominateurs, jamais de l'exponentielle :

- $\ln(e^x - 2)$: il faut $e^x - 2 > 0$, soit $e^x > 2$, soit $x > \ln 2$;
- $\ln(e^x + 1)$: $e^x + 1 > 0$ toujours, donc défini sur $\mathbb{R}$;
- $\frac{1}{e^x - 1}$: il faut $e^x \neq 1$, soit $x \neq 0$.

Simplifier avant de calculer. $\ln(e^u) = u$ et $e^{\ln v} = v$ (pour $v > 0$). Pour une somme, on factorise par le terme dominant (partie 10).

Ce type de fonction, avec e^x et $\ln x$ ensemble, est au cœur du problème du sujet national 2026.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit $f(x) = \ln(1 + e^x)$. **1)** Ensemble de définition. **2)** Limites et asymptotes. **3)** Variations.

Solution. **1)** $1 + e^x > 0$ pour tout x : $D_f = \mathbb{R}$.

2) En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \ln 1 = 0$: la droite $y = 0$ est asymptote. En $+\infty$: $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$, donc $f(x) - x \rightarrow 0$: la droite $y = x$ est asymptote oblique.

3) f est de la forme $\ln u$: $f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

17. Exponentielle de base a

الدالة الأسية للأساس a

DÉFINITIONS

Définition. Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. La fonction **exponentielle de base a** est la réciproque de $\log_a$ (chapitre 5). Pour tout réel x : $a^x = e^{x \ln a}$. Pour $a = e$, on retrouve e^x ; pour $a = 10$, la réciproque du logarithme décimal.

Propriétés. Les **mêmes règles que pour e^x** : $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $(a^x)^r = a^{rx}$. Et, pour $b > 0$: $a^x = b \iff x = \frac{\ln b}{\ln a}$.

Dérivée et sens de variation. $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (\ln a) a^x$.

- Si $a > 1$: $\ln a > 0$, la fonction est strictement **croissante**.
- Si $0 < a < 1$: $\ln a < 0$, la fonction est strictement **décroissante**, et le sens d'une inéquation **change**.

ATTENTION

Certains documents inversent ces deux cas. Pour vérifier : 2^x croît ($2^1 < 2^2$) et $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ décroît ($\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$). Et $(a^x)'$ n'est pas xa^{x-1} .

EXEMPLE RÉSOLU

1) Résoudre $2^x = 5$. 2) Résoudre $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{8}$. 3) Dériver $f(x) = 3^x$.

Solution. 1) $2^x = 5 \iff x \ln 2 = \ln 5 \iff x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,32$.

2) $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ et la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est décroissante : on change le sens, $x \geq 3$. $S = [3; +\infty[$.

3) $f'(x) = (\ln 3) 3^x$.

18. La demi-vie : l'exponentielle dans la nature عمر النصف: الدالة الأسية في الطبيعة

MÉTHODE

Une substance radioactive se désintègre : chaque jour, elle perd **le même pourcentage** de sa masse. Sa masse s'écrit donc $M(t) = M_0 \times q^t$ avec $0 < q < 1$, ou encore $M(t) = M_0 e^{-\lambda t}$ avec $\lambda = -\ln q > 0$.

La **demi-vie** T est la durée au bout de laquelle la masse a diminué de moitié : $q^T = \frac{1}{2}$, soit $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Elle ne dépend pas de la masse de départ.

Valeurs approchées. On les obtient à la calculatrice avec les touches e^x et $\ln$; on garde les valeurs exactes jusqu'à la fin du calcul.

EXEMPLE RÉSOLU

L'iode 131 est utilisé en médecine. Sa masse, en grammes, au bout de t jours, est $M(t) = 100 \times 0,917^t$.

1) Étudier le sens de variation de M . 2) Calculer la demi-vie. 3) Au bout de combien de jours reste-t-il moins de 10 g ?

Solution. 1) $M'(t) = 100 (\ln 0,917) 0,917^t < 0$ car $\ln 0,917 < 0$: M est strictement décroissante.

2) $M(t) = 50 \iff 0,917^t = 0,5 \iff t \ln 0,917 = \ln 0,5 \iff t = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,917} \approx 8,0$. La demi-vie de l'iode 131 est d'environ 8 jours.

3) $0,917^t < 0,1 \iff t \ln 0,917 < \ln 0,1 \iff t > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,917} \approx 26,6$ (on a divisé par $\ln 0,917 < 0$). Il reste moins de 10 g à partir du 27^e jour.

Carte : étudier une fonction avec exp

خريطة: كيف ندرس دالة تحتوي على exp

MÉTHODE

Je vois...	Je pense à...	Je conclus avec...
$e^x, \frac{e^x}{x^n}$ ou $x^n e^x$	où va x ?	limite de référence (citée)
$\frac{e^{ax} - 1}{x}$ en 0	faire apparaître $u = ax$	$\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1$
$e^x - x, e^{2x} - e^x$ (indétermination)	factoriser par le terme dominant	une limite de référence
$\ln(e^x + 1)$	factoriser par e^x	$x + \ln(1 + e^{-x})$
e^u à dériver	$(e^u)' = u'e^u$	signe de u' (car $e^u > 0$)
$u'e^u$ à primitiver	ajuster le coefficient	$e^u + c$, puis vérifier
$f(x) - (ax + b)$ avec une exponentielle	$e^{\dots} > 0$	signe du facteur restant : position
a^x avec $0 < a < 1$	$\ln a < 0$	fonction décroissante : le sens change

Dans tous les cas : **une exponentielle est toujours strictement positive.**

Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ Écrire $(e^x)^2 = e^{x^2}$.

✓ $(e^x)^2 = e^{2x}$. Pour $x = 3$: e^6 et non e^9 .

✗ Résoudre $e^x = -2$ en écrivant $x = \ln(-2)$.

✓ $e^x > 0$ pour tout réel x : l'équation n'a **aucune solution**, et $\ln(-2)$ n'existe pas.

✗ Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$ et répondre $S =]1; 2[$.

✓ $1 < X < 2$ porte sur $X = e^x$. On revient à x : $1 < e^x < 2 \iff 0 < x < \ln 2$, donc $S =]0; \ln 2[$.

✗ Écrire $(e^{3x})' = e^{3x}$.

✓ $(e^u)' = u'e^u$: $(e^{3x})' = 3e^{3x}$.

✗ Donner e^{2x} comme primitive de e^{2x} .

✓ En dérivant e^{2x} , on obtient $2e^{2x}$. Une primitive est $\frac{1}{2}e^{2x}$: on vérifie toujours en dérivant.

✗ Croire que $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est croissante.

✓ Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$ et a^x est **décroissante** : $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Dans une inéquation, le sens change.

MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.