



Chapitre : Les fonctions exponentielles

الدوال الأسية



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

La fonction exponentielle

DÉFINITIONS

- exp est la réciproque de ln : pour x réel et $y > 0$, $e^x = y \iff x = \ln y$.
- $e^x > 0$ pour tout réel x ; $e^0 = 1$; $e^1 = e \approx 2,718$.
- $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x ; $e^{\ln y} = y$ pour tout $y > 0$.
- exp est strictement croissante : $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$; $e^x > 1 \iff x > 0$.

Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉS

- $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^r = e^{ra}$ (r rationnel).
- L'exponentielle transforme les **sommes** en produits ; il n'y a aucune règle pour $e^a + e^b$.
- Pour $a > 0$: $e^{k \ln a} = a^k$.

★ Limites et courbe de exp

★ À RETENIR

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- Asymptote $y = 0$ en $-\infty$; branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$; courbe convexe, symétrique de celle de ln par rapport à $y = x$; tangente en 0 : $y = x + 1$, d'où $e^x \geq x + 1$.

★ Dérivées et primitives

★ À RETENIR

- $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = u' e^u$; e^u a le même sens de variation que u .
- Les primitives de $u' e^u$ sont $e^u + c$; une primitive de e^{ax+b} (a non nul) est $\frac{1}{a} e^{ax+b}$.

Méthodes

MÉTHODE

- **Équation** : $e^u = e^v \iff u = v$; $e^u = k \iff u = \ln k$ si $k > 0$, aucune solution si $k \leq 0$.
- **Avec e^{2x} et e^x** : poser $X = e^x$ avec $X > 0$, rejeter les $X \leq 0$, puis revenir à $x = \ln X$.
- **Inéquation** : $e^u < e^v \iff u < v$; diviser par un négatif change le sens.
- **Système** : $X = e^x$, $Y = e^y$, et $e^{x+y} = XY$.
- **Limites** : regarder où tend l'exposant, factoriser par le terme dominant ; $\ln(e^x + 1) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

★ Exponentielle de base a et demi-vie

★ À RETENIR

- $a^x = e^{x \ln a}$ ($a > 0$, a différent de 1) : mêmes règles que e^x ; $(a^x)' = (\ln a) a^x$.
- Croissante si $a > 1$, **décroissante si** $0 < a < 1$; $a^x = b \iff x = \frac{\ln b}{\ln a}$.
- Décroissance radioactive $M(t) = M_0 e^{-\lambda t}$: demi-vie $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

★ Erreurs à éviter

★ À RETENIR

- $(e^x)^2 = e^{2x}$, et non e^{x^2} .
- $e^x = -2$ n'a pas de solution : $\ln(-2)$ n'existe pas.
- Après avoir posé $X = e^x$, toujours revenir à x .
- $(e^{3x})' = 3e^{3x}$; une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ est décroissante : le sens d'une inéquation change.

✗ Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ Écrire $(e^x)^2 = e^{x^2}$.

✓ $(e^x)^2 = e^{2x}$. Pour $x = 3$: e^6 et non e^9 .

✗ Résoudre $e^x = -2$ en écrivant $x = \ln(-2)$.

✓ $e^x > 0$ pour tout réel x : l'équation n'a **aucune solution**, et $\ln(-2)$ n'existe pas.

✗ Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$ et répondre $S =]1; 2[$.

✓ $1 < X < 2$ porte sur $X = e^x$. On revient à x : $1 < e^x < 2 \iff 0 < x < \ln 2$, donc $S =]0; \ln 2[$.

✗ Écrire $(e^{3x})' = e^{3x}$.

✓ $(e^u)' = u'e^u$: $(e^{3x})' = 3e^{3x}$.

✗ Donner e^{2x} comme primitive de e^{2x} .

✓ En dérivant e^{2x} , on obtient $2e^{2x}$. Une primitive est $\frac{1}{2}e^{2x}$: on vérifie toujours en dérivant.



✗ Croire que $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est croissante.

✓ Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$ et a^x est **décroissante** : $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Dans une inéquation, le sens change.

★ Tableau récapitulatif des formules

Formule	Conditions d'usage
$e^x = y \iff x = \ln y$	x réel, $y > 0$
$e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^x > 0$	Pour tout réel x
$e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	a, b réels
$(e^a)^r = e^{ra}$	r rationnel
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	Limites aux bornes de $\mathbb{R}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	Nombre dérivé de exp en 0
$e^x \geq x + 1$	Pour tout réel x (tangente en 0)
$(e^u)' = u' e^u$; $u' e^u \rightarrow e^u + c$	u dérivable sur I
$a^x = e^{x \ln a}$; $(a^x)' = (\ln a) a^x$	$a > 0$; décroissante si $0 < a < 1$
$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$	Demi-vie de $M_0 e^{-\lambda t}$



MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.

