



Chapitre : Les nombres complexes

الأعداد العقدية



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

💡 SITUATION DÉCLENCHANTE وضعية انطلاق

Réolvons l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$: il est négatif, donc l'équation n'a **aucune solution réelle**, car aucun réel n'a un carré égal à -4 .

Et si l'on acceptait un nouveau nombre, noté i , tel que $i^2 = -1$? Alors $-4 = 4i^2 = (2i)^2$, et la formule habituelle donne deux solutions : $z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = 1-i$.

Vérifions pour z_1 : $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$, donc $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 2i - 2 - 2i + 2 = 0$. Ça marche !

Un peu d'histoire. Au XVI^e siècle, les mathématiciens italiens cherchent les solutions de $x^3 = 15x + 4$. La solution réelle est $x = 4$ (car $64 = 60 + 4$). Pourtant, la formule de Cardan oblige à passer par des « racines carrées de nombres négatifs ». Bombelli remarque que $(2+i)^3 = 2+11i$ et $(2-i)^3 = 2-11i$, et la formule donne alors $x = (2+i) + (2-i) = 4$. Ces nombres « imaginaires » servaient donc à trouver une solution bien réelle.

Dans ce chapitre, on construit cet ensemble de nombres, appelé **ensemble des nombres complexes**. On apprend à y calculer, puis à l'utiliser en géométrie : distances, angles et transformations du plan.

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE أهداف الفصل

- Calculer avec les nombres complexes sous forme algébrique, trigonométrique et exponentielle.
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, et inversement.
- Utiliser le module et l'argument pour calculer des distances et des angles.
- Linéariser des expressions trigonométriques à l'aide des formules d'Euler.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré à coefficients réels.
- Utiliser les nombres complexes en géométrie : alignement, orthogonalité, nature d'un triangle, translation, homothétie et rotation.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique

مجموعة الأعداد العقدية والكتابة الجبرية

DÉFINITIONS

Définition. Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, qui contient $\mathbb{R}$ et un nombre i tel que $i^2 = -1$. On y calcule avec les **mêmes règles** que dans $\mathbb{R}$. Ses éléments sont les **nombres complexes**.

Tout nombre complexe z s'écrit de façon **unique** $z = a + ib$, avec a et b **réels**. C'est la **forme algébrique** de z :

- a est la **partie réelle** de z , notée $\text{Re}(z)$;
- b est la **partie imaginaire** de z , notée $\text{Im}(z)$. C'est un **réel** : pour $z = 3 - 4i$, $\text{Im}(z) = -4$ et non $-4i$.

Cas particuliers. z est **réel** si et seulement si $\text{Im}(z) = 0$. z est **imaginaire pur** si et seulement si $\text{Re}(z) = 0$ (par exemple $5i$ ou $-i$).

Égalité. Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : $a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'$. En particulier, $a + ib = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$.

EXEMPLE RÉSOLU

Soit a un réel et $z = (a - 2) + (a + 3)i$. **1)** Pour quelle valeur de a le nombre z est-il réel ? **2)** Imaginaire pur ? **3)** Trouver les réels x et y tels que $x + 2i = 3 + yi$.

Solution. **1)** z est réel $\iff \text{Im}(z) = 0 \iff a + 3 = 0 \iff a = -3$. On a alors $z = -5$.

2) z est imaginaire pur $\iff \text{Re}(z) = 0 \iff a - 2 = 0 \iff a = 2$. On a alors $z = 5i$.

3) On identifie les parties réelles et les parties imaginaires : $x = 3$ et $y = 2$.

2. Somme, produit et puissances de i

الجمع والضرب وقوى i

PROPRIÉTÉS

On calcule comme avec des réels, puis on remplace i^2 par -1 . Pour $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$:

- **Somme** : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$;
- **Produit** : on développe, puis $i^2 = -1$. On obtient $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$;
- les identités remarquables restent vraies, par exemple $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ et $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Puissances de i . $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \times i = -i$ et $i^4 = (i^2)^2 = 1$. Ensuite tout recommence de 4 en 4 : i^n ne dépend que du **reste de la division de n par 4**.

EXEMPLE RÉSOLU

Écrire sous forme algébrique : **1)** $(2 + 3i) + (1 - i)$; **2)** $(2 + 3i)(1 - i)$; **3)** $(1 + i)^2$ puis $(1 + i)^4$; **4)** i^{2026} .

Solution. **1)** $(2 + 3i) + (1 - i) = 3 + 2i$.

2) $(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i$.

3) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, donc $(1 + i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$.

4) $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $i^{2026} = (i^4)^{506} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$.

3. Le conjugué d'un nombre complexe

مرافق عدد عقدي

PROPRIÉTÉS

Définition. Le **conjugué** de $z = a + ib$ (avec a et b réels) est $\bar{z} = a - ib$: on change le signe de la partie imaginaire. Par exemple $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$, $\overline{-5i} = 5i$ et $\overline{7} = 7$.

Propriétés. Pour tous nombres complexes z et z' , et tout entier naturel n :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$;
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ et, si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$;
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$: attention au i dans la seconde formule ;
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$: c'est un **réel positif** ;
- z est réel $\iff \bar{z} = z$; z est imaginaire pur $\iff \bar{z} = -z$.

Méthode pour une équation avec z et $\bar{z}$. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels. Alors $\bar{z} = x - iy$, puis on identifie les parties réelles et les parties imaginaires.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Pour $z = 2 + 3i$, calculer $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ et $z\bar{z}$. **2)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + \bar{z} = 3 - 4i$.

Solution. **1)** $\bar{z} = 2 - 3i$, donc $z + \bar{z} = 4$, $z - \bar{z} = 6i$ et $z\bar{z} = 2^2 + 3^2 = 13$.

2) On pose $z = x + iy$. Alors $2z + \bar{z} = 2x + 2iy + x - iy = 3x + iy$. L'équation s'écrit $3x + iy = 3 - 4i$, donc $3x = 3$ et $y = -4$, soit $x = 1$ et $y = -4$. $S = \{1 - 4i\}$.

Vérification : $2(1 - 4i) + (1 + 4i) = 2 - 8i + 1 + 4i = 3 - 4i$.

4. Inverse et quotient

مقلوب عدد عقدي وخارج عددين عقديين

MÉTHODE

Si $z = a + ib \neq 0$, alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$ est un réel non nul. D'où l'**inverse** :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Méthode. Pour écrire un quotient $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, on **multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur**. Le dénominateur devient un réel.

EXEMPLE RÉSOLU

Écrire sous forme algébrique : **1)** $\frac{1}{3-i}$; **2)** $\frac{1+2i}{3-i}$; **3)** $\frac{1}{i}$; **4)** $\frac{1+i}{1-i}$.

Solution. **1)** $\frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$.

2) $\frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i+6i+2i^2}{10} = \frac{1+7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

3) $\frac{1}{i} = \frac{-i}{i \times (-i)} = \frac{-i}{1} = -i$.

4) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$.

5. Représentation géométrique : affixe d'un point et d'un vecteur

التمثيل الهندسي لعدد عقدي

DÉFINITIONS

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On l'appelle le **plan complexe**.

- À tout nombre $z = a + ib$ on associe le point $M(a; b)$, appelé **image** de z . On dit que z est l'**affixe** de M et on note $M(z)$.
- De même, le vecteur $\vec{w}(a; b)$ a pour affixe $a + ib$.
- Les réels sont sur l'axe des abscisses (**axe réel**), et les imaginaires purs sur l'axe des ordonnées (**axe imaginaire**).

Propriétés. Pour des points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$:

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ (l'arrivée moins le départ) ;
- le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$;
- $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, soit $z_B - z_A = z_C - z_D$;
- les images de z et de $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel ; celles de z et de $-z$ sont symétriques par rapport à O .

EXEMPLE RÉSOLU

On donne $A(1 + 2i)$, $B(3 - i)$ et $C(4 + i)$. **1)** Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ et celle du milieu I de $[AB]$. **2)** Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solution. **1)** $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (3 - i) - (1 + 2i) = 2 - 3i$, et $z_I = \frac{(1 + 2i) + (3 - i)}{2} = \frac{4 + i}{2} = 2 + \frac{1}{2}i$.

2) $ABCD$ est un parallélogramme $\iff z_B - z_A = z_C - z_D \iff z_D = z_A + z_C - z_B$. Donc $z_D = (1 + 2i) + (4 + i) - (3 - i) = 2 + 4i$.

Vérification : $z_C - z_D = (4 + i) - (2 + 4i) = 2 - 3i = z_B - z_A$.

6. Module et distances

مقياس عدد عقدي والمسافة

PROPRIÉTÉS

Définition. Le **module** de $z = a + ib$ est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si M est l'image de z , alors $|z| = OM$. On a aussi $|z|^2 = z\bar{z}$.

Distance. Pour deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$: $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés. Pour tous z et z' , et tout entier naturel n :

- $|zz'| = |z| \times |z'|$, $|z^n| = |z|^n$ et, si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;
- $|\bar{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$;
- pour une somme, on a seulement $|z + z'| \leq |z| + |z'|$: en général, $|z + z'| \neq |z| + |z'|$.

Ensembles de points. Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts, et $r > 0$.

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - a| = r$ est le **cercle** de centre A et de rayon r , car $|z - a| = AM$.
- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - a| = |z - b|$ est la **médiatrice** de $[AB]$, car $AM = BM$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Calculer $|3 + 4i|$, $|(1 + i)^6|$ et $\left| \frac{3 + 4i}{1 - i} \right|$. **2)** Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2 + i| = 3$.

Solution. 1) $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ (et non $3 + 4 = 7$).

$|1 + i| = \sqrt{2}$, donc $|(1 + i)^6| = (\sqrt{2})^6 = 8$. Et $\left| \frac{3 + 4i}{1 - i} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2) $|z - 2 + i| = |z - (2 - i)|$. Avec $\Omega(2 - i)$, on a $|z - 2 + i| = \Omega M$. L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega(2 - i)$ et de rayon 3.

7. Argument d'un nombre complexe non nul

عمدة عدد عقدي غير منعدم

DÉFINITIONS

Définition. Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M . On appelle **argument** de z toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On note $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$, car un argument est défini à un multiple de 2π près. Le nombre 0 n'a pas d'argument.

Cas à connaître. Pour $k > 0$: $\arg(k) \equiv 0$; $\arg(-k) \equiv \pi$; $\arg(ki) \equiv \frac{\pi}{2}$; $\arg(-ki) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Propriétés. Pour z et z' non nuls, et n entier naturel (toutes les égalités sont modulo 2π) :

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')$ et $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)$;
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')$;
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)$.

Ces règles valent pour le produit et le quotient, **pas pour la somme**.

Angle d'un vecteur. Pour $A \neq B$: $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Donner un argument de 3, -2 , $5i$ et $1 + i$. **2)** En déduire un argument de $(1 + i)^5$ et de $-1 - i$.

Solution. 1) $\arg(3) \equiv 0$, $\arg(-2) \equiv \pi$ et $\arg(5i) \equiv \frac{\pi}{2}$. Le point d'affixe $1 + i$ est $M(1; 1)$, sur la bissectrice du premier quadrant : $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

2) $\arg((1 + i)^5) \equiv 5 \times \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$.

$-1 - i = -(1 + i)$, donc $\arg(-1 - i) \equiv \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$. Le point $(-1; -1)$ est bien dans le troisième quadrant : ce n'est pas $\frac{\pi}{4}$.

8. Forme trigonométrique

الكتابة المثلثية لعدد عقدي غير منعدم

MÉTHODE

Propriété. Tout nombre complexe **non nul** z s'écrit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $r = |z| > 0$ et $\theta \equiv \arg(z) [2\pi]$. C'est une **forme trigonométrique** de z , notée $z = [r; \theta]$.

Passer de $a + ib$ à $[r; \theta]$.

1. Calculer $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Écrire $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.
3. Reconnaître θ sur le cercle trigonométrique, en regardant les **deux signes**.

Passer de $[r; \theta]$ à $a + ib$: $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$.

Calculs. $[r; \theta] \times [r'; \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$, $\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$ et $[r; \theta]^n = [r^n; n\theta]$.

Pièges. Le module doit être **positif**, et c'est « $\cos + i \sin$ » avec le même angle :

- $-2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left[2; \frac{5\pi}{4} \right]$;
- $\cos \theta - i \sin \theta = [1; -\theta]$ et $-\cos \theta + i \sin \theta = [1; \pi - \theta]$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Écrire $z = 1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 + i$ sous forme trigonométrique. **2)** Écrire $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Solution. 1) $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{3}$: $z = \left[2; \frac{\pi}{3} \right]$. De même, $|z'| = \sqrt{2}$, $\cos \theta' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \theta' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\theta' \equiv \frac{\pi}{4}$: $z' = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$.

2) $\frac{z}{z'} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{12} \right]$.

Sous forme algébrique : $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$.

On identifie les deux écritures : $\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Donc $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Carte : quelle méthode pour quelle question ?

خريطة: أي طريقة لأي سؤال؟

MÉTHODE

On me demande...	Je pense à...	Je conclus avec...
la forme algébrique d'un quotient	le conjugué du dénominateur	un dénominateur réel, puis $a + ib$
z réel, ou z imaginaire pur	$\text{Im}(z)$, ou $\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z) = 0$, ou $\text{Re}(z) = 0$
une équation avec z et $\bar{z}$	poser $z = x + iy$	identifier les parties réelles et imaginaires
i^n	le reste de n dans la division par 4	$1, i, -1$ ou $-i$
une distance AB	le module	$AB = z_B - z_A $
l'ensemble des $M(z)$ tels que $ z - a = r$, ou $ z - a = z - b $	$ z - a = AM$	un cercle, ou une médiatrice
un argument, ou une forme trigonométrique	$r = z $, $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\sin \theta = \frac{b}{r}$	$[r; \theta]$ avec $r > 0$, en regardant les deux signes
un produit, un quotient ou une puissance	la forme trigonométrique	multiplier les modules, ajouter les arguments

Dans tous les cas : $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$ sont des **réels**, un module est **positif**, et un argument est donné **modulo** 2π .

9. Notation exponentielle

الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم

DÉFINITIONS

Notation. Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. C'est le nombre de module 1 et d'argument θ : $|e^{i\theta}| = 1$.

Tout nombre complexe non nul $z = [r; \theta]$ s'écrit donc $z = re^{i\theta}$, avec $r = |z| > 0$. C'est sa **forme exponentielle**.

Règles de calcul. Ce sont celles des puissances : pour tous réels θ et θ' , et tout entier n :

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Valeurs à connaître. $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\pi/2} = -i$ et $e^{2i\pi} = 1$.

ATTENTION

Attention. Dans $re^{i\theta}$, le module r doit être positif : $-2e^{i\theta} = 2e^{i(\theta+\pi)}$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Écrire $z = 1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle, puis calculer z^6 . **2)** Pour quels entiers naturels n le nombre $(1 + i)^n$ est-il réel ?

Solution. **1)** On a vu que $z = \left[2; \frac{\pi}{3}\right]$, donc $z = 2e^{i\pi/3}$. Alors $z^6 = 2^6 e^{6i\pi/3} = 64e^{2i\pi} = 64$.

2) $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, donc $(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4}$. Ce nombre est réel quand son argument est un multiple de π : $\frac{n\pi}{4} = k\pi$, soit $n = 4k$. Donc $(1 + i)^n$ est réel si et seulement si n est un multiple de 4.

10. Formules de Moivre et d'Euler

صيغتنا موافر وأولير

PROPRIÉTÉS

Formule de Moivre. Pour tout réel θ et tout entier n : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$. C'est la règle $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ écrite avec cos et sin.

Formules d'Euler. Comme $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$, on obtient en ajoutant puis en soustrayant :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Angle moitié. On met $e^{i\theta/2}$ en facteur : $1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Avec la formule de Moivre pour $n = 2$, retrouver $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$. 2) Écrire $1 + e^{i\pi/3}$ sous forme exponentielle.

Solution. 1) $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$. Par Moivre, c'est aussi $\cos 2\theta + i \sin 2\theta$. On identifie les parties réelles et imaginaires : $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ et $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$. Avec $n = 3$, on obtient de la même façon $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

2) Avec $\theta = \frac{\pi}{3}$: $1 + e^{i\pi/3} = 2 \cos \frac{\pi}{6} e^{i\pi/6} = \sqrt{3} e^{i\pi/6}$. Le module est $\sqrt{3} > 0$, donc c'est bien une forme exponentielle.

Vérification : $1 + e^{i\pi/3} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

11. Linéariser avec les formules d'Euler

إخطاط حدوديات مثلثية

MÉTHODE

Linéariser, c'est écrire une puissance comme $\cos^3 x$ ou $\sin^2 x$ sous la forme d'une somme de termes $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, **sans puissance**. On en a besoin pour trouver des primitives (chapitre 4) et calculer des intégrales (chapitre 8).

Méthode.

- Remplacer $\cos x$ et $\sin x$ par les formules d'Euler.
- Développer (identités remarquables, binôme : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$).
- Regrouper les termes deux par deux : $e^{ikx} + e^{-ikx} = 2 \cos(kx)$ et $e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i \sin(kx)$.

Résultats à connaître. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

EXEMPLE RÉSOLU

Linéariser $\cos^3 x$, puis en déduire une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8}$, car $e^{2ix} \times e^{-ix} = e^{ix}$.

On regroupe : $\cos^3 x = \frac{(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} = \frac{2 \cos 3x + 6 \cos x}{8}$.

Donc $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$.

Une primitive est $F(x) = \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$, car la dérivée de $\sin 3x$ est $3 \cos 3x$.

12. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

MÉTHODE

Équation $z^2 = a$, avec a réel. Si $a > 0$: $z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$. Si $a = 0$: $z = 0$. Si $a < 0$: $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$.

Équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b, c réels et $a \neq 0$. On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$: deux solutions réelles $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$: une solution réelle $-\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$: **deux solutions complexes conjuguées** $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dans $\mathbb{C}$, l'équation a donc toujours des solutions. On n'écrit jamais $\sqrt{\Delta}$ quand $\Delta < 0$.

Somme et produit. Les solutions z_1 et z_2 vérifient $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Degré 3. Si l'on connaît une solution α d'une équation de degré 3, on factorise par $(z - \alpha)$, puis on résout l'équation du second degré qui reste.

EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre dans $\mathbb{C}$: **1)** $z^2 = -9$; **2)** $z^2 - 6z + 13 = 0$; **3)** $z^3 - 5z^2 + 9z - 5 = 0$, en remarquant que 1 est solution.

Solution. **1)** $-9 < 0$: $z = 3i$ ou $z = -3i$. $S = \{-3i; 3i\}$.

2) $\Delta = 36 - 52 = -16 < 0$ et $\sqrt{-\Delta} = 4$. Donc $z = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i$ ou $z = 3 + 2i$. $S = \{3 - 2i; 3 + 2i\}$.

Contrôle : la somme vaut $6 = -\frac{-6}{1}$ et le produit vaut $9 + 4 = 13$.

3) $1 - 5 + 9 - 5 = 0$, donc 1 est solution. On vérifie en développant que $z^3 - 5z^2 + 9z - 5 = (z - 1)(z^2 - 4z + 5)$.

Pour $z^2 - 4z + 5 = 0$: $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc $z = 2 - i$ ou $z = 2 + i$. $S = \{1; 2 - i; 2 + i\}$.

13. Angles, alignement et orthogonalité

الزوايا والاستقامة والتعامد

PROPRIÉTÉS

Angle orienté. Pour des points A, B, C distincts : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$. Le point d'arrivée du second vecteur est au numérateur.

Plus généralement, pour $A \neq B$ et $C \neq D$: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$.

Conséquences.

- A, B, C (distincts) sont **alignés** $\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un **réel** ;
- $(AB) \parallel (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un **réel** ;
- $(AB) \perp (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un **imaginaire pur**.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Les points $A(1+i)$, $B(3+2i)$ et $C(5+3i)$ sont-ils alignés ? 2) On donne $A(1)$, $B(2+i)$ et $C(i)$. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Solution. 1) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4+2i}{2+i} = \frac{2(2+i)}{2+i} = 2$. C'est un réel, donc A , B et C sont alignés.

2) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2} = \frac{-1+i+i-i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$.

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$: les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

14. Nature d'un triangle ou d'un quadrilatère

طبيعة مثلث أو رباعي

MÉTHODE

Méthode : un seul quotient. Pour un triangle ABC , on calcule $q = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. On a $|q| = \frac{AC}{AB}$ et $\arg(q) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi]$.

Si...	alors le triangle est...
$ q = 1$	isocèle en A ($AB = AC$)
q imaginaire pur	rectangle en A
$q = i$ ou $q = -i$	rectangle et isocèle en A
$q = e^{i\pi/3}$ ou $q = e^{-i\pi/3}$	équilateral

Attention : $|q| = 1$ seul ne suffit pas pour « équilateral ». Il faut aussi $\arg(q) \equiv \pm \frac{\pi}{3}$.

Quadrilatères. $ABCD$ est un parallélogramme si $z_B - z_A = z_C - z_D$. C'est un **rectangle** s'il a en plus un angle droit, un **losange** s'il a deux côtés consécutifs de même longueur, et un **carré** s'il a les deux.

Cercle circonscrit. Son centre Ω vérifie $\Omega A = \Omega B = \Omega C$.

EXEMPLE RÉSOLU

Déterminer la nature du triangle ABC : 1) $A(1)$, $B(2+i)$, $C(i)$; 2) $A(1)$, $B(3)$, $C(2+i\sqrt{3})$.

Solution. 1) On a calculé à la partie 13 que $q = i$. Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en A .

2) $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\pi/3}$. Le triangle ABC est donc équilateral.

15. Translation et homothétie

الإزاحة والتحاكي

PROPRIÉTÉS

Une transformation associe à tout point $M(z)$ un point $M'(z')$. Son **écriture complexe** donne z' en fonction de z .

- **Translation** de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b : $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$, donc $z' = z + b$.
- **Homothétie** de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k (réel non nul) : $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$, donc $z' - \omega = k(z - \omega)$.

Reconnaître $z' = az + b$, avec a réel non nul.

- Si $a = 1$: c'est la translation de vecteur d'affixe b .
- Si $a \neq 1$: c'est l'homothétie de rapport a et de centre le point fixe $\Omega(\omega)$. On trouve ω en résolvant $\omega = a\omega + b$, soit $\omega = \frac{b}{1-a}$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(1)$ et de rapport -2 , puis l'affixe de l'image de $A(i)$. **2)** Reconnaître la transformation $z' = 2z - 1 + i$.

Solution. **1)** $z' - 1 = -2(z - 1)$, soit $z' = -2z + 3$. L'image de A a pour affixe $-2i + 3 = 3 - 2i$.

2) $a = 2$ est un réel différent de 1 : c'est une homothétie de rapport 2 . Son centre vérifie $\omega = 2\omega - 1 + i$, soit $\omega = 1 - i$.

Vérification : $2(1 - i) - 1 + i = 1 - i$, donc $\Omega(1 - i)$ est bien fixe.

16. Rotation**الدوران** **PROPRIÉTÉS**

Écriture complexe. La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]$. Son écriture complexe est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega), \text{ soit } z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Si le centre est O : $z' = e^{i\theta}z$. Par exemple, **multiplier par $i = e^{i\pi/2}$, c'est tourner d'un quart de tour** autour de O .

Reconnaître $z' = az + b$, avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$. C'est la rotation d'angle $\arg(a)$ et de centre $\Omega(\omega)$, avec $\omega = \frac{b}{1 - a}$.

Une rotation conserve les distances. Si M' est l'image de M , alors $\Omega M = \Omega M'$: le triangle $\Omega M M'$ est isocèle en Ω . Il est équilatéral si l'angle vaut $\pm \frac{\pi}{3}$.

EXEMPLE RÉSOLU

1) Déterminer l'image de $A(3 + i)$ par la rotation de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. **2)** Reconnaître la transformation $z' = iz + 2$.

Solution. **1)** $z' = (1 + i) + i((3 + i) - (1 + i)) = 1 + i + 2i = 1 + 3i$.

2) $|i| = 1$ et $i \neq 1$: c'est une rotation d'angle $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}$. Son centre a pour affixe $\omega = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i$.



Carte : géométrie avec les complexes

خريطة: الهندسة بالأعداد العقدية

MÉTHODE

On me demande...	Je calcule...	Je conclus avec...
une puissance z^n , ou si z^n est réel	la forme exponentielle $re^{i\theta}$	$r^n e^{in\theta}$; réel si $n\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$
linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$	les formules d'Euler, puis je développe	$e^{ikx} + e^{-ikx} = 2 \cos kx$
résoudre $az^2 + bz + c = 0$	Δ	si $\Delta < 0$: $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
A, B, C alignés ?	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$	alignés si ce quotient est réel
des droites perpendiculaires ?	$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$	perpendiculaires s'il est imaginaire pur
la nature du triangle ABC	$q = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$	$ q = 1$: isocèle ; $q = \pm i$: rectangle isocèle ; $q = e^{\pm i\pi/3}$: équilatéral
reconnaître $z' = az + b$	a et $\omega = \frac{b}{1-a}$	$a = 1$: translation ; a réel : homothétie ; $ a = 1$: rotation d'angle $\arg(a)$
l'image d'un point par une rotation	$z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$	sans oublier le $+\omega$

Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ Oublier $i^2 = -1$: $(2 + 3i)(1 - i) = -1 + i$.

✓ $(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i$.

✗ Écrire $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$.

✓ $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$. C'est $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ qui n'a pas de i .

✗ Écrire $|3 + 4i| = 3 + 4 = 7$.

✓ $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$: on utilise la partie imaginaire 4, un réel, sans le i .

✗ Donner $\arg(-1 - i) = \frac{\pi}{4}$ parce que $\tan \theta = 1$.

✓ $\cos \theta < 0$ et $\sin \theta < 0$: on est dans le 3^e quadrant, donc $\arg(-1 - i) \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

✗ Lire $-2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ comme une forme trigonométrique de module -2 .

✓ Un module est **positif** : $-2e^{i\pi/4} = 2e^{i\pi}e^{i\pi/4} = 2e^{i5\pi/4}$.

✗ Conclure « pas de solution » quand $\Delta < 0$.

✓ Dans $\mathbb{C}$, il y a deux solutions conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. On n'écrit jamais $\sqrt{\Delta}$ avec $\Delta < 0$.

✗ Inverser le quotient : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

✓ Le vecteur d'arrivée est au numérateur : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \pmod{2\pi}$.



✗ Écrire la rotation $z' = e^{i\theta}(z - \omega)$ (oubli du $+$ ω).

✓ $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, donc $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$. Vérification : le centre Ω est sa propre image.

**MONSUPERPROF IA**

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.

