



Chapitre : Les nombres complexes

الأعداد العقدية



Vidéo du cours



Quiz interactif



MonSuperProf IA

L'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique

DÉFINITIONS

- $i^2 = -1$. Tout complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$ (a, b réels) : $\text{Re}(z) = a$ et $\text{Im}(z) = b$ sont des réels.
- z réel $\iff b = 0$; z imaginaire pur $\iff a = 0$; $a + ib = a' + ib' \iff a = a'$ et $b = b'$.
- $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; i^n dépend du reste de n dans la division par 4.

Conjugué, inverse et quotient

PROPRIÉTÉS

- $\bar{z} = a - ib$; $z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$; $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
- Le conjugué d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une puissance est la somme, le produit, le quotient ou la puissance des conjugués.
- z réel $\iff \bar{z} = z$; z imaginaire pur $\iff \bar{z} = -z$.
- **Quotient** : multiplier le numérateur **et** le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

★ Module, affixes et ensembles de points

★ À RETENIR

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$; $AB = |z_B - z_A|$.
- $|zz'| = |z| |z'|$; $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $|z^n| = |z|^n$; seulement $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$; milieu de $[AB]$: $\frac{z_A + z_B}{2}$.
- $|z - z_A| = r$: cercle de centre A et de rayon r ; $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de $[AB]$.

★ Argument, formes trigonométrique et exponentielle

★ À RETENIR

- $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$, $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.
- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'$; $\arg(z^n) \equiv n \arg z$; $\arg \bar{z} \equiv -\arg z$; $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \pmod{2\pi}$.
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\pi/2} = i$.
- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.

★ Moivre, Euler et linéarisation

★ À RETENIR

- **Moivre** : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
- **Euler** : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
- **Angle moitié** : $1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$.
- **Linéariser** (pour trouver une primitive) : $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$.

🔧 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

🔧 MÉTHODE

- $az^2 + bz + c = 0$ (a, b, c réels, a non nul), $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta < 0$: **deux solutions conjuguées** $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
- Si $a < 0$: $z^2 = a \iff z = \pm i\sqrt{-a}$.
- Degré 3 avec une solution connue z_0 : factoriser par $(z - z_0)$, puis résoudre le second degré.

★ Angles et nature d'un triangle

★ À RETENIR

- $q = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg q \pmod{2\pi}$.
- q réel : A, B, C alignés ; q imaginaire pur : $(AB) \perp (AC)$.
- $|q| = 1$: isocèle en A ; $q = \pm i$: rectangle isocèle en A ; $q = e^{\pm i\pi/3}$: équilatéral.

★ Translation, homothétie, rotation

★ À RETENIR

- Translation de vecteur d'affixe b : $z' = z + b$.
- Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k : $z' - \omega = k(z - \omega)$.
- Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
- Pour $z' = az + b$: $a = 1$ translation ; a réel autre que 1 : homothétie de rapport a ; $|a| = 1$ et a autre que 1 : rotation d'angle $\arg a$. Centre : $\omega = \frac{b}{1-a}$.

Méthodes

MÉTHODE

- **Quelle forme ?** Somme, différence, partie réelle : forme algébrique. Produit, quotient, puissance : forme exponentielle.
- **Argument :** regarder les signes de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ (le quadrant), pas seulement $\tan \theta$.
- **Nature d'un triangle :** calculer un seul quotient q et le mettre sous forme algébrique ou exponentielle.
- **Transformation :** vérifier que le centre Ω est sa propre image.

Erreurs fréquentes

أخطاء شائعة

✗ Oublier $i^2 = -1$: $(2 + 3i)(1 - i) = -1 + i$.

✓ $(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i$.

✗ Écrire $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$.

✓ $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$. C'est $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ qui n'a pas de i .

✗ Écrire $|3 + 4i| = 3 + 4 = 7$.

✓ $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$: on utilise la partie imaginaire 4, un réel, sans le i .

✗ Donner $\arg(-1 - i) = \frac{\pi}{4}$ parce que $\tan \theta = 1$.

✓ $\cos \theta < 0$ et $\sin \theta < 0$: on est dans le 3^e quadrant, donc $\arg(-1 - i) \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

✗ Lire $-2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ comme une forme trigonométrique de module -2 .

✓ Un module est **positif** : $-2e^{i\pi/4} = 2e^{i\pi}e^{i\pi/4} = 2e^{i5\pi/4}$.

✗ Conclure « pas de solution » quand $\Delta < 0$.

✓ Dans $\mathbb{C}$, il y a deux solutions conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. On n'écrit jamais $\sqrt{\Delta}$ avec $\Delta < 0$.

✗ Inverser le quotient : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

✓ Le vecteur d'arrivée est au numérateur : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} [2\pi]$.

✗ Écrire la rotation $z' = e^{i\theta}(z - \omega)$ (oubli du $+$ ω).

✓ $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, donc $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$. Vérification : le centre Ω est sa propre image.

★ Tableau récapitulatif des formules

Formule	Conditions d'usage
$i^2 = -1 ; i^4 = 1$	i^n selon le reste de n par 4
$z\bar{z} = a^2 + b^2 ; z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$	$z = a + ib$
$ z = \sqrt{a^2 + b^2} ; AB = z_B - z_A $	Module et distance
$ zz' = z z' ; z^n = z ^n$	z, z' complexes
$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$	z, z' non nuls
$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$	$r = z > 0$
$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$	Formule de Moivre
$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ; \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$	Formules d'Euler
$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	a, b, c réels, $\Delta < 0$
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} [2\pi]$	A, B, C distincts
$z' - \omega = k(z - \omega)$	Homothétie de centre Ω , rapport k
$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$	Rotation de centre Ω , angle θ

MONSUPERPROF IA

Une notion n'est pas claire ? Scanne le QR « MonSuperProf IA » en page 1 et pose ta question : explication pas à pas, en français ou en darija.